PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2017

MATEMÁTICAS II

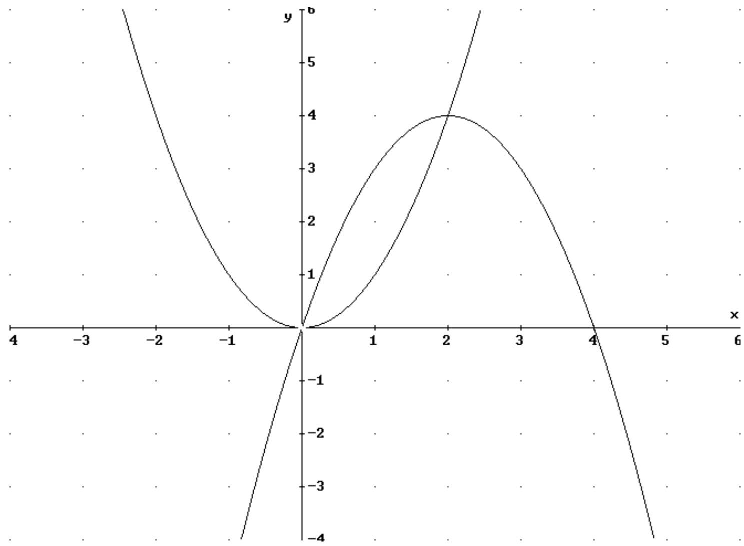
TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$
a) Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.
b) Expresa el área como una integral.
c) Calcula el área.
MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Las dos funciones son parábolas y podemos dibujarlas dibujarla fácilmente con una tabla de valores.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = -x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \; ; \; x = 2$$

Las dos funciones se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(2,4)$

b) El área de la región pedida es:

$$A = \int_0^2 \left((-x^2 + 4x) - (x^2) \right) \, dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) \, dx$$

c) Calculamos el área

$$A = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) \, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \right]_0^2 = \left(-\frac{16}{3} + \frac{16}{2} \right) - (0) = \frac{8}{3} \; u^2$$

Calcula $\displaystyle\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ ***(sugerencia*** $t=\sqrt[4]{x}$ **).**

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t=\sqrt[4]{x} \Rightarrow t^4 = x$, vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$4t^3 dt = dx$$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$x=1 \Rightarrow t=\sqrt[4]{1}=1$$

$$x=16 \Rightarrow t=\sqrt[4]{16}=2$$

Sustituyendo, tenemos:

$$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int_1^2 \frac{4t^3 dt}{t^2+t} = \int_1^2 \frac{4t^2 dt}{t+1}$$

Hacemos la división de los dos polinomios, con lo cual:

$$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int_1^2 \frac{4t^3 dt}{t^2+t} = \int_1^2 \frac{4t^2 dt}{t+1} = \int_1^2 \left(4t-4+\frac{4}{t+1}\right) dt = \left[2t^2-4t+4\ln|t+1|\right]_1^2 =$$
$$= (8-8+4\ln 3)-(2-4+4\ln 2) = 2+4\ln\frac{3}{2} = 3'62$$

Determina la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=x\cdot e^{x}$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x=1$.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Integramos dos veces, por partes, para calcular la expresión de $f(x)$.

$$f'(x)=\int x\cdot e^{x}dx=x\cdot e^{x}-\int e^{x}dx=x\cdot e^{x}-e^{x}+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=e^{x}dx;\ v=e^{x} \end{array}}$$

$$f(x)=\int\left(x\cdot e^{x}-e^{x}+C\right)dx=x\cdot e^{x}-e^{x}-e^{x}+Cx+D$$

Calculamos los valores de C y D.

- Pasa por $(0,0)\Rightarrow 0-e^{0}-e^{0}+o+D=0\Rightarrow D=2$

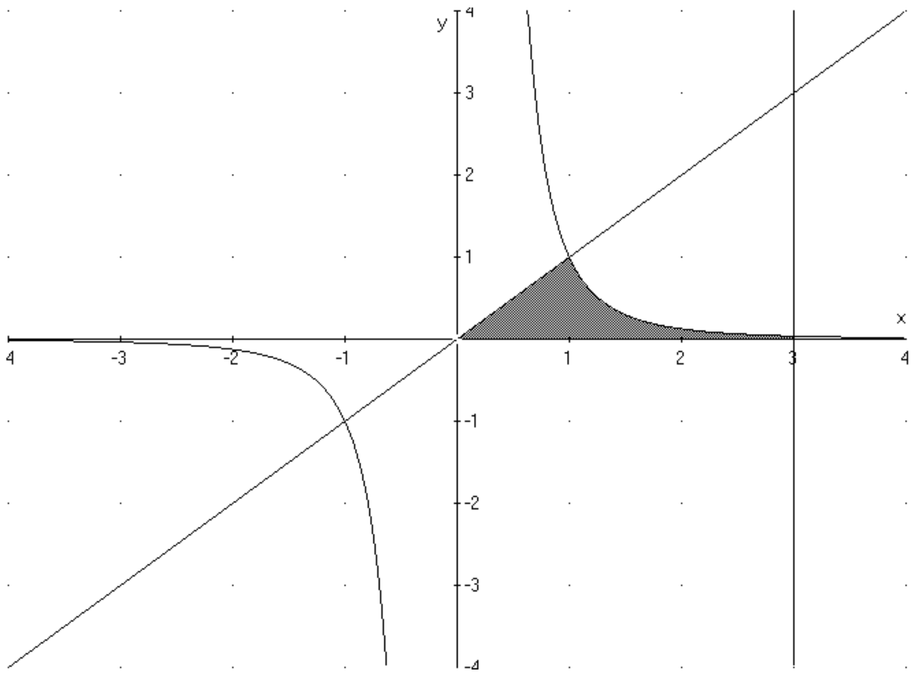
- Extremo relativo en $x=1\ \Rightarrow\ f'(1)=0\Rightarrow e-e+C=0\Rightarrow C=0$

Luego, la función es: $f(x)=x\cdot e^{x}-2e^{x}+2$

Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje OX, la recta $y=x$, la gráfica $y=\frac{1}{x^3}$ y la recta $x=3$.
a) Haz un esbozo del recinto descrito.
b) Calcula el área del recinto
c) Si consideras la gráfica $y=\frac{1}{x}$ en lugar de $y=\frac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial.?. ¿Por qué?
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos un esbozo del recinto



b) Calculamos el área del recinto

$$A=A_1+A_2=\int_0^1 (x-0)\,dx+\int_1^3\left(\frac{1}{x^3}-0\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{18}+\frac{1}{2}=\frac{17}{18}\ u^2$$

c) Será mayor. Ya que $A_2=\int_1^3\left(\frac{1}{x^3}-0\right)dx=\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^3=-\frac{1}{18}+\frac{1}{2}=\frac{4}{9}\ u^2$

y si utilizamos la función $\frac{1}{x}$, entonces: $A_2=\int_1^3\left(\frac{1}{x}-0\right)dx=\left[\ln x\right]_1^3=\ln 3-\ln 1=1'09\ u^2$