PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2013

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x)=|x(x-2)| \quad \text{y} \quad g(x)=x+4$$

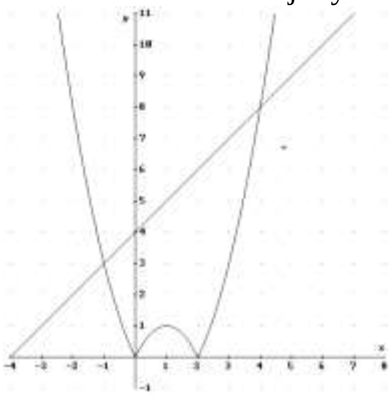
a) Esboza las gráficas de *f* y *g* sobre los mismos ejes. Calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.
b) Calcula el área del recinto limitado por gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función *f(x)*, para que nos resulte más sencillo dibujarla y después calcular el área que nos piden.

$$f(x)=|x(x-2)|=\begin{cases} x^2-2x & si\ x<0 \\ -x^2+2x & si\ 0\le x\le 2 \\ x^2-2x & si\ x>2 \end{cases}$$

La función *f(x)* son tres ramas de parábola fáciles de dibujar y la función *g(x)* es una recta.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$x+4=x^2-2x \Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow x=-1\ ;\ x=4$$

Luego, los puntos de corte son: $(-1,3)$ y $(4,8)$

b) Calculamos el área.

$$A=\int_{-1}^{0}\left[(x+4)-(x^2-2x)\right]dx+\int_{0}^{2}\left[(x+4)-(-x^2+2x)\right]dx+\int_{2}^{4}\left[(x+4)-(x^2-2x)\right]dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+3x+4)dx+\int_{0}^{2}(x^2-x+4)dx+\int_{2}^{4}(-x^2+3x+4)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right]_{2}^{4}=\frac{13}{6}+\frac{26}{3}+\frac{22}{3}=\frac{109}{6}\ u^2$$

Sea $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=ln(x^2+1)$ (donde ln denota el logaritmo neperiano). Calcula la primitiva de *g* cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral de $g(x)$, por partes:

$$\int Ln(1+x^2)\ dx = x\cdot Ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx$$

$$u=Ln(1+x^2);\ du=\frac{2x}{1+x^2}\ dx$$
$$dv=dx;\ v=x$$

La integral que nos queda es una integral racional, hacemos la división y nos queda:

$$\int Ln(1+x^2)\ dx = x\cdot Ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx = x\cdot Ln(1+x^2)-\int 2\,dx+\int\frac{2}{1+x^2}dx =$$
$$= x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\ x+C$$

De todas las primitivas de $g(x)$

$$G(x)=x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\ x+C$$

nos piden la que pasa por el punto $(0,0)$, luego:

$$G(0)=0\cdot Ln(1+0^2)-2\cdot 0+2\,arc\,tg\ 0+C=0\Rightarrow C=0$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden es: $G(x)=x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\ x$

De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x=1$, un punto de inflexión en $(0,0)$ y que $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$. Calcula *a, b, c* y *d*.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \ ; \ f''(x)=6ax+2b$$

Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Máximo en $x=1 \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 3a+2b+c=0$

- Punto de inflexión en $(0,0) \Rightarrow \begin{cases} Pasa\ \ por\ (0,0) \Rightarrow d=0 \\ f''(0)=0 \Rightarrow b=0 \end{cases}$

- $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{4} \Rightarrow \int_0^1 (ax^3+cx)\,dx=\left[\frac{ax^4}{4}+\frac{cx^2}{2}\right]_0^1=\frac{a}{4}+\frac{c}{2}=\frac{5}{4}$

Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones sale: $a=-1$; $b=0$; $c=3$; $d=0$

Calcula $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular primero la integral indefinida, que es una integral racional y, como el numerador y el denominador tienen igual grado, lo que hacemos es la división de los dos polinomios y la descomponemos en:

$$\int \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{6x-5}{x^2-6x+5}\,dx = x + \int \frac{6x-5}{x^2-6x+5}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-6x+5=0 \Rightarrow x=1\ ;\ x=5$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{6x-5}{x^2-6x+5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow 1=-4A \Rightarrow A=-\frac{1}{4}$$

$$x=5 \Rightarrow 25=4B \Rightarrow B=\frac{25}{4}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx = x + \int \frac{6x-5}{x^2-6x+5}\,dx = x + \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{25}{4}}{x-5}\,dx = x - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{25}{4}\ln|x-5|$$

Por lo tanto, la integral que nos piden valdrá:

$$\int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx = \left[x - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{25}{4}\ln|x-5|\right]_2^4 = \left(4-\frac{1}{4}\ln 3+\frac{25}{4}\ln 1\right) - \left(2-\frac{1}{4}\ln 1+\frac{25}{4}\ln 3\right) = 2-\frac{13}{2}\ln 3$$

Halla $\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}\, dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2$$
$$dx=2t\ dt$$

Con lo cual:

$$I=\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}\, dx=\int \frac{t^2+1}{1+t}\, 2tdt=\int \frac{2t^3+2t}{1+t}\, dt$$

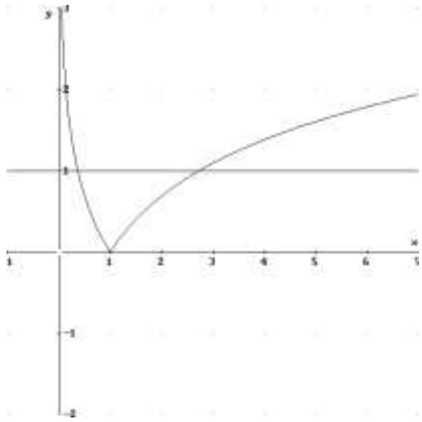
Es una integral racional, hacemos la división y descomponemos

$$I=\int \frac{2t^3+2t}{1+t}\, dt=\int\left(2t^2-2t+4-\frac{4}{1+t}\right)dt=\frac{2t^3}{3}-t^2+4t-4\ln|1+t|=\frac{2(\sqrt{x})^3}{3}-x+4\sqrt{x}-4\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C$$

Sea $g:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=|\ln x|$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).
a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y=1$. Calcula los puntos de corte entre ellas.
b) Calcula el área del recinto anterior.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos las dos funciones:



b) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$|\ln x|=1\Rightarrow\begin{cases}\ln x=1\Rightarrow x=e\\-\ln x=1\Rightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}\end{cases}$$

Calculamos el área que nos piden

$$A=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left[1-(-\ln x)\right]\,dx+\int_{1}^{e}\left[1-(\ln x)\right]\,dx=\left[x+x\ln x-x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[x-x\ln x+x\right]_{1}^{e}=\frac{1}{e}+e-2\ u^{2}$$

Recuerda que la integral de ln$x$ es por partes:

$$\int\ln x\ dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l}u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}\,dx\\ dv=dx;\ v=x\end{array}}$$

Sea $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$

Determina la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto $P(1,0)$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2$$
$$dx=2t\ dt$$

Con lo cual:

$$I=\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{2t}{t+t^2}\,dt=\int \frac{2}{1+t}\,dt=2\ln|1+t|=2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C$$

Calculamos la que pasa por el punto $P(1,0)$

$$0=2\ln\left|1+\sqrt{1}\right|+C\Rightarrow C=-2\ln 2$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|-2\ln 2$

Calcula $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\, sen(2x)\, dx$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $F(x)=\int x\, sen(2x)\, dx$, que es una integral por partes.

$$F(x)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\, sen(2x)\, dx=\left[-x\cdot\frac{\cos 2x}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\, dx=\left[-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{sen\, 2x}{4}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

$u=x;\ du=dx$

$dv=sen\, 2x\, dx;\ v=-\dfrac{\cos 2x}{2}$

Sean *f* y *g* las funciones definidas por $f(x)=2-x$ y $g(x)=\dfrac{2}{x+1}$ para $x\neq -1$.

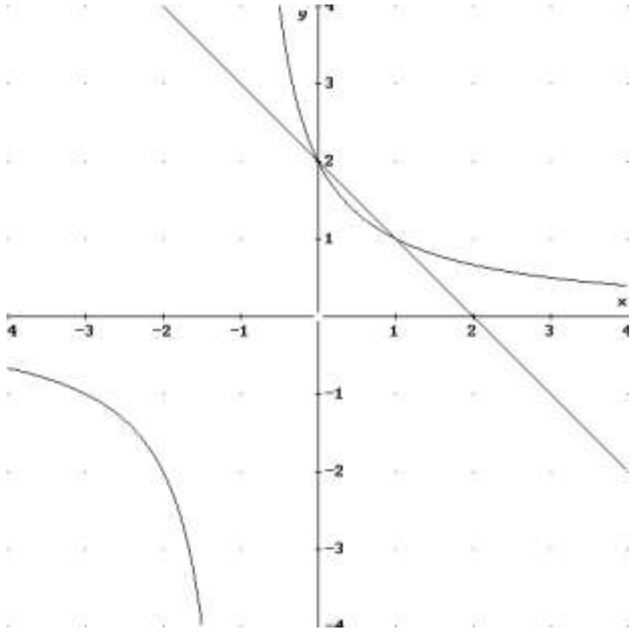
a) Calcula los puntos de corte entre las gráficas de *f* y *g*.
b) Esboza las gráficas de *f* y *g* sobre los mismos ejes.
c) Halla el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Igualamos las dos funciones para calcular los puntos de corte

$$2-x=\frac{2}{x+1}\Rightarrow -x^2+x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=1$$

b) Hacemos el dibujo de las dos funciones:



c) Calculamos el área que nos piden

$$A=\int_0^1\left[(2-x)-\left(\frac{2}{x+1}\right)\right]dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}-2\ln|x+1|\right]_0^1=\left(2-\frac{1}{2}-2\ln 2\right)-(0)=\frac{3}{2}-2\ln 2\,u^2$$

Calcula $\int_{2}^{4} \frac{e^{x}}{1+\sqrt{e^{x}}}\, dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{e^{x}}$.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{e^{x}} = t \Rightarrow e^{x} = t^{2}$$
$$e^{x} dx = 2t\ dt$$

Calculamos los nuevos límites de integración: $x=2 \Rightarrow t=e$; $x=4 \Rightarrow t=e^{2}$

Con lo cual:

$$I=\int_{2}^{4} \frac{e^{x}}{1+\sqrt{e^{x}}}\, dx=\int_{e}^{e^{2}} \frac{2t}{1+t}\, dt=\int_{e}^{e^{2}} \left(2-\frac{2}{1+t}\right) dt=\left[2t-2\ln|1+t|\right]_{e}^{e^{2}}=$$
$$=2e^{2}-2e+2\ln\frac{1+e}{1+e^{2}}=7'71$$

a) Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f'(x)=(2x+1)e^{-x}$ y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.
b) Calcula la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $f(x)=\int(2x+1)\cdot e^{-x}\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=2x+1;\ \ du=2\,dx \\ dv=e^{-x}\,dx;\ v=-e^{-x} \end{array}}$$

$$f(x)=\int(2x+1)\cdot e^{-x}\,dx=-(2x+1)\cdot e^{-x}+2\int e^{-x}\,dx=-(2x+1)\cdot e^{-x}-2\cdot e^{-x}+C$$

Como su gráfica pasa por el origen de coordenadas, se cumple que:

$$f(0)=0\Rightarrow-(2\cdot 0+1)\cdot e^{-0}-2\cdot e^{-0}+C=0\Rightarrow C=3$$

Luego, la función que nos piden es: $f(x)=-(2x+1)\cdot e^{-x}-2\cdot e^{-x}+3$

b) Calculamos la ecuación de la recta tangente en $x=0$.

- $x=0\Rightarrow f(0)=0$

- $f'(0)=(2\cdot 0+1)e^{-0}=1$

Luego, la ecuación de la recta tangente es: $y-0=1(x-0)\Rightarrow y=x$.

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=-x^2+6x-5$.
a) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de *g* en el punto de abscisa $x=4$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *g*, la recta $x-2y+2=0$. Calcula el área de este recinto.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

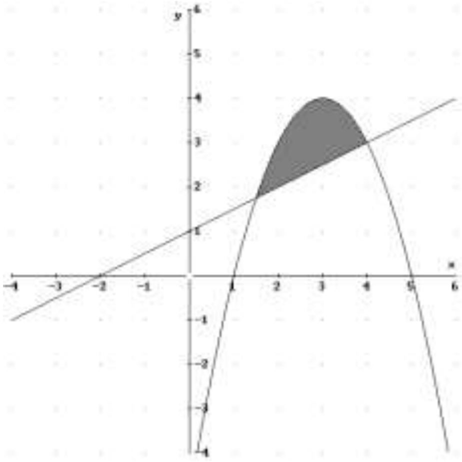
a) La ecuación de la recta normal en el punto de abscisa $x=4$ es: $y-g(4)=-\dfrac{1}{g'(4)}\cdot(x-4)$

Calculamos: $g(4)=-4^2+6\cdot 4-5=3$

$g'(x)=-2x+6\Rightarrow g'(4)=-2$

Sustituyendo, tenemos: $y-g(4)=-\dfrac{1}{g'(4)}\cdot(x-4)\Rightarrow y-3=\dfrac{1}{2}(x-4)\Rightarrow x-2y+2=0$

b) Esbozamos el recinto que nos dicen



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$-x^2+6x-5=\frac{x+2}{2}\Rightarrow -2x^2+11x-12=0\Rightarrow x=\frac{-11\pm\sqrt{121-96}}{-4}=\frac{-11\pm 5}{-4}\Rightarrow \begin{matrix} x=4 \\ x=\dfrac{3}{2}\end{matrix}$$

Calculamos el área del recinto

$$A=\int_{\frac{3}{2}}^{4}\left((-x^2+6x-5)-\frac{x+2}{2}\right)dx=\int_{\frac{3}{2}}^{4}\left(-x^2+\frac{11x}{2}-6\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{11x^2}{4}-6x\right]_{\frac{3}{2}}^{4}=$$

$$=\left(-\frac{64}{3}+44-24\right)-\left(-\frac{9}{8}+\frac{99}{16}-9\right)=\frac{125}{48}\ u^2$$