PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2006

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A

Sea $I=\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

a) Expresa I aplicando el cambio de variables $t=1+x^2$.

b) Calcula el valor de I.

MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los nuevos límites de integración:

$$Si\ \ x=0 \Rightarrow t=1+x^2=1$$
$$Si\ \ x=2 \Rightarrow t=1+x^2=5$$

$$\left.\begin{array}{l} t=1+x^2\ ;\ x^2=t-1 \\ dt=2x\,dx\ ;\ x\,dx=\dfrac{dt}{2} \end{array}\right\} I=\int_0^2 \frac{x^2\cdot x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int_1^5 \frac{(t-1)\cdot\dfrac{dt}{2}}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_1^5 (t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})\,dt$$

b) $$I=\frac{1}{2}\int_1^5 (t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^5=\frac{2\sqrt{5}+2}{3}$$

El área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y=\dfrac{x^2}{a}$ e $y=\sqrt{ax}$, con $a>0$, vale 3. Calcula el valor de *a*.
MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

1) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x^2}{a} \\ y=\sqrt{ax} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a}=\sqrt{ax} \Rightarrow \frac{x^4}{a^2}=ax \Rightarrow x^4-a^3x=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=a \end{array}\right.$$

2) Vamos a ver en el intervalo (0,*a*), que función va por encima y cuál por debajo

$$Si\ x=\frac{a}{2} \Rightarrow y=\frac{x^2}{a}=\frac{\frac{a^2}{4}}{a}=\frac{a}{4} \Rightarrow Debajo$$

$$Si\ x=\frac{a}{2} \Rightarrow y=\sqrt{ax}=\sqrt{\frac{a^2}{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow Encima$$

3) Calculamos el área

$$3=\int_0^a \left(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a}\right)dx=\left[\sqrt{a}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{a}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^2}{3}$$

$$3=\frac{a^2}{3} \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3$$

Como el enunciado nos dice que $a>0$, entonces $a=3$.

Sea *f* la función definida por $f(x)=\begin{cases} e^x-1 & si \quad x\geq 0 \\ x\cdot e^{-x^2} & si \quad x<0 \end{cases}$

a) Estudia la derivabilidad de *f* en $x=0$ y, si es posible, calcula la derivada de *f* en dicho punto.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta $x=-1$.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos primero la continuidad

e^x-1 es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser suma de funciones continuas.
$x\cdot e^{-x^2}$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser producto de funciones continuas.

Nos falta ver la continuidad en $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} e^x-1=0 \\ \lim_{x\to 0^-} x\cdot e^{-x^2}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} e^x-1=\lim_{x\to 0^-} x\cdot e^{-x^2}=0$$, luego, es continua en $x = 0$

Calculamos $f'(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x>0 \\ 1\cdot e^{-x^2}(1-2x^2) & si \quad x<0 \end{cases}$

Veamos si existe $f'(0)$,es decir, si $f'(0^+)=f'(0^-)$

$f'(0^+)=1$
$f'(0^-)=1$

Como $f'(0^+)=f'(0^-)=1$, existe $f'(0)=1$

b) Como nos piden el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta $x = -1$ solo interviene la rama $x\cdot e^{-x^2}$ puesto que $f(0) = 0$ y para $x > 0$ la función e^x-1 sube a $+\infty$. La función $x\cdot e^{-x^2}$ solo corta al eje OX en $x = 0$, y para $x < 0$ está siempre debajo del eje OX, luego:

$$Área=\int_{-1}^{0}-x\cdot e^{-x^2}\,dx$$

Hacemos el cambio $-x^2=t \Rightarrow -2x\,dx=dt$

Para $x=-1 \Rightarrow t=-1$
Para $x=0 \Rightarrow t=0$

$$Área=\int_{-1}^{0}-x\cdot e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}e^t\,dt=\frac{1}{2}\left[e^t\right]_{-1}^{0}=\frac{e-1}{2e}\,u^2$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{a}{x} & si \quad x\le -1 \\ x^2+1 & si \quad x>-1 \end{cases}$

a) Halla el valor de *a* sabiendo que *f* es continua.
b) Esboza la gráfica de *f*.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas $x+2=0$ y $x-2=0$.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

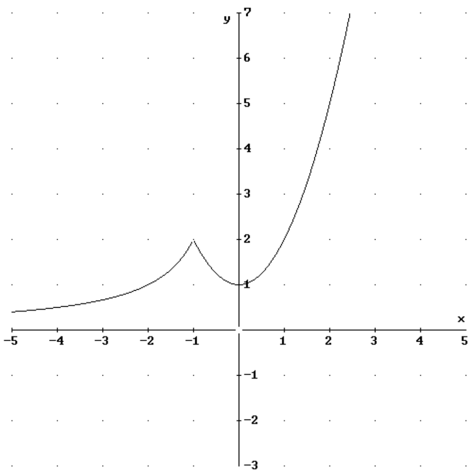
a) Como *f* es continua se tiene que cumplir que los limites laterales en $x=-1$ sean iguales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} -\dfrac{a}{x}=a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} x^2+1=2 \end{array}\right\}\Rightarrow a=2$$

b) $-\dfrac{2}{x}$ es una hipérbola (función de proporcionalidad inversa) que se dibuja en el II y IV cuadrante. Como sabemos tiene de asíntota horizontal y = 0, y de vertical x = 0.

x^2+1 es una parábola exactamente igual que x^2 pero desplazada una unidad hacia arriba en el eje OY.

Un esbozo de su gráfica sería:



c) El área limitada por OX y las rectas $x=-2$ y $x=2$ es:

$$A=\int_{-2}^{-1}-\frac{2}{x}dx+\int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx=\left[-2\ln x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^3}{3}+3\right]_{-1}^{2}=6+2\ln 2\ u^2$$

a) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=ax^2+b$. Halla los valores de a y b sabiendo $\int_0^6 f(x)dx=6$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa 3 vale -12.
b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=x^2+px+q$. Calcula los valores de p y q sabiendo que la función f tiene un extremo en $x=-6$ y su valor en él es -2.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\int_0^6 f(x)\,dx=6\Rightarrow\int_0^6 (ax^2+b)\,dx=\left[\frac{ax^3}{3}+bx\right]_0^6=\frac{216a}{3}+6b=6\Rightarrow 12a+b=1$$

Si la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa 3 vale −12, sabemos que $f'(3)=-12$

$$f'(x)=2ax\Rightarrow f'(3)=-12\Rightarrow 6a=-12\Rightarrow a=-2$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos: $12a+b=1\Rightarrow -24+b=1\Rightarrow b=25$

Luego, la función pedida es: $f(x)=-2x^2+25$

b)

Extremo en $x=-6\Rightarrow f'(6)=0\Rightarrow -12+p=0\Rightarrow p=12$

Pasa por $(-6,-2)\Rightarrow f(-6)=-2\Rightarrow 36-6p+q=-2\Rightarrow 36-72+q=-2\Rightarrow q=34$

La función pedida es $f(x)=x^2+12x+34$

Calcula $\int (x^2-1)\cdot e^{-x}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos por partes la integral que nos piden.

$$\int (x^2-1)\cdot e^{-x}dx = -(x^2-1)\cdot e^{-x}+2\int x\cdot e^{-x}dx = -(x^2-1)\cdot e^{-x}+2\left[-x\cdot e^{-x}+\int e^{-x}dx\right] = -e^{-x}(x^2+2x+1)+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x^2-1;\ du = 2x\ dx \\ dv = e^{-x}dx;\ v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x;\ du = dx \\ dv = e^{-x}dx;\ v = -e^{-x} \end{array}}$$

Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=sen\, x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x=\pi$.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La recta tangente en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$f(x)=sen\, x \Rightarrow f(0)=0$
$f'(x)=\cos x \Rightarrow f'(0)=1$

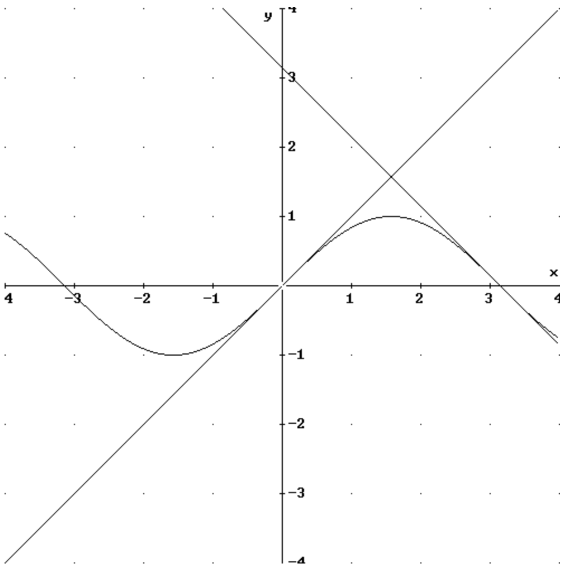
La recta tangente en $x=0$ es $y-0=1\cdot(x-0)\Rightarrow y=x$, que es la bisectriz del I y III cuadrante.

La recta tangente en $x=\pi$ es $y-f(\pi)=f'(\pi)\cdot(x-\pi)$

$f(x)=sen\, x \Rightarrow f(\pi)=0$
$f'(x)=\cos x \Rightarrow f'(\pi)=-1$

La recta tangente en $x=\pi$ es $y-0=-1\cdot(x-\pi)\Rightarrow y=-x+\pi$, que es la bisectriz del II y IV cuadrante, pero desplazada π unidades hacia arriba en el eje OY.

Un esbozo de la gráfica es:



El área pedida es

$$\int_0^{\pi/2}(x-sen\, x)dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-x+\pi-sen\, x)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\cos x\right]_0^{\pi/2}+\left[-\frac{x^2}{2}+\pi x+\cos x\right]_{\pi/2}^{\pi}=\frac{\pi^2-8}{4}u^2$$

Sea $f:[0,4]\rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que su función derivada viene dada por

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}x & si \quad 0<x<3 \\ -2x+8 & si \quad 3\le x\le 4 \end{cases}$$

a) Determina la expresión de *f* sabiendo que $f(1)=\frac{16}{3}$

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 1.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como es derivable en (0,4) es continua en [0,4] en particular es continua y derivable en $x = 3$.

Calculamos $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{3}+C & si \quad 0<x<3 \\ -x^2+8x+D & si \quad 3\le x\le 4 \end{cases}$

Como $f(1)=\frac{16}{3}\Rightarrow \frac{1}{3}+C=\frac{16}{3}\Rightarrow C=5$

Como es continua en $x = 3$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2}{3}+C=3+C \\ \lim\limits_{x\to 3^+}-x^2+8x+D=15+D \end{array}\right\}\Rightarrow 3+C=15+D\Rightarrow 8=15+D\Rightarrow D=-7$$

Luego, la función es: $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{3}+5 & si \quad 0<x<3 \\ -x^2+8x-7 & si \quad 3\le x\le 4 \end{cases}$

b) La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1)=\frac{1}{3}+5=\frac{16}{3}$$
$$f'(1)=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$$

Luego la recta tangente en $x = 1$ es $y-\frac{16}{3}=\frac{2}{3}\cdot(x-1)\Rightarrow 2x-3y+14=0$

Sean las funciones f y g : $[0,+\infty] \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x)=x^2$ y $g(x)=\lambda\sqrt{x}$, donde λ es un número real positivo fijo. Calcula el valor de λ sabiendo que el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones es $\frac{1}{3}$.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si igualamos las dos funciones, vemos que los puntos de corte son:

$$x^2=\lambda\sqrt{x} \Rightarrow x^4=\lambda^2 x \Rightarrow x=0 \;\; ; \;\; x=\sqrt[3]{\lambda^2}$$

Tenemos que ver cuál de las dos funciones va por encima y cuál va por debajo. Para ello sustituimos un valor comprendido entre 0 y $\sqrt[3]{\lambda^2}$, y vemos cuál tiene mayor valor.

Para $x=\frac{\lambda}{2} \Rightarrow f(x)=x^2=\frac{\lambda^2}{4}$

Para $x=\frac{\lambda}{2} \Rightarrow g(x)=\lambda\sqrt{x}=\lambda\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$

Por lo tanto, la función que va por encima es $g(x)=\lambda\sqrt{x}$. Luego el área vendrá dada por:

$$A=\int_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}}\left[\lambda\sqrt{x}-x^2\right]dx=\left[\lambda\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}}=\frac{2\lambda^2}{3}-\frac{\lambda^2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow\lambda=\pm 1$$

Como λ es un número positivo, entonces $\lambda=1$

Sea $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} Ln\,x & si \quad 0<x\le 1 \\ Ln(2-x) & si \quad 1<x<2\end{cases}$

siendo Ln la función logaritmo neperiano.
a) Estudia la derivabilidad de *f* en el punto *x* = 1.
b) Calcula $\int_1^{1'5} f(x)\,dx$
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a estudiar primero la continuidad en x = 1.

1) $f(1)=\ln 1=0$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(2-x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

3) $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

Luego, la función es continua en x = 1. Vamos a estudiar ahora la derivabilidad, para ello calculamos $f'(x)$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad 0<x<1 \\ \dfrac{-1}{2-x} & si \quad 1<x<2\end{cases}$$

La función es derivable en x = 1 si $f'(1^-)=f'(1^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\dfrac{1}{1}=1 \\ f'(1^+)=\dfrac{-1}{1}=-1\end{array}\right\} f'(1^-)\neq f'(1^+)\Rightarrow \text{No derivable}$$

b)

$$\int_1^{1'5}\ln(2-x)dx=\left[x\cdot\ln(2-x)+\int\frac{x}{2-x}dx\right]=\left[x\cdot\ln(2-x)-x-2\ln(x-2)\right]_1^{1'5}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-0'15$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u=\ln(2-x);\ du=\dfrac{-1}{2-x}\,dx \\ dv=dx;\ v=x\end{array}}$$

a) Haz un esbozo del recinto limitado por las curvas $y=\dfrac{15}{1+x^2}$ e $y=x^2-1$.

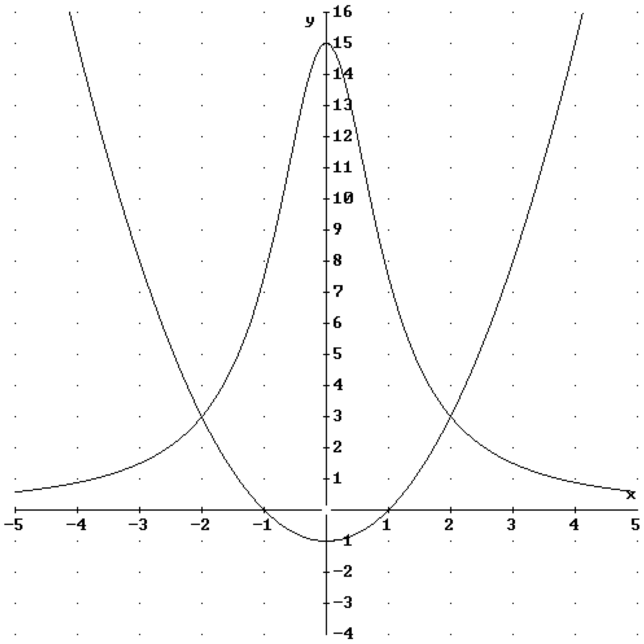
b) Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $y=\dfrac{15}{1+x^2}$ siempre es positiva (está por encima del eje de abscisas OX), tiene una asíntota horizontal que es la recta $y=0$ y, además, $f(0)=15$. La función $y=x^2-1$ es una parábola.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas es



b)

$$A=\int_{-2}^{2}\left(\frac{15}{1+x^2}-x^2+1\right)dx=\left[15\,arc\,tg\,x-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{2}=30\,arc\,tg\,2-\frac{4}{3}\,u^2$$

Calcula

a) $\displaystyle\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\, dx$ **.**

b) $\displaystyle\int (2x-3)\cdot tg\,(x^2 - 3x)\, dx$ **, siendo *tg* la función tangente.**

MATEMÁTICAS II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como el polinomio del numerador y del denominador tienen igual grado, lo primero que hacemos es dividir.

$$\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\, dx = \int 5\, dx + \int \frac{-x-35}{x^2 - 25}\, dx = 5x + I_1$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x = 5; x = -5$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-x-35}{x^2 - 25} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5) + B(x-5)}{(x-5)(x+5)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$x = 5 \Rightarrow -40 = 10A\ ;\ A = -4$

$x = -5 \Rightarrow -30 = -10B\ ;\ B = 3$

Con lo cual:

$$I_1 = \int \frac{-x-35}{x^2 - 25}\, dx = \int \frac{-4}{x-5}\, dx + \int \frac{3}{x+5}\, dx = -4\ln|x-5| + 3\ln|x+5|$$

Por lo tanto la solución es:

$$\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\, dx = 5x - 4\ln|x-5| + 3\ln|x+5| + C$$

b) Hacemos el cambio de variable $x^2 - 3x = t$, con lo cual $(2x-3)dx = dt$. Sustituyendo, tenemos:

$$\int (2x-3)\cdot tg\,(x^2 - 3x)\, dx = \int tg\, t\, dt = -\int \frac{-sen\, t}{\cos t}\, dt = -\ln|\cos t| = -\ln|\cos(x^2 - 3x)| + C$$