

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 5: INTEGRALES**

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Determina un polinomio  $P(x)$  de segundo grado sabiendo que  $P(0) = P(2) = 1$  y

$$\int_0^2 P(x) dx = \frac{1}{3}$$

MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

El polinomio que queremos hallar será de la forma:  $P(x) = ax^2 + bx + c$

$$- P(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

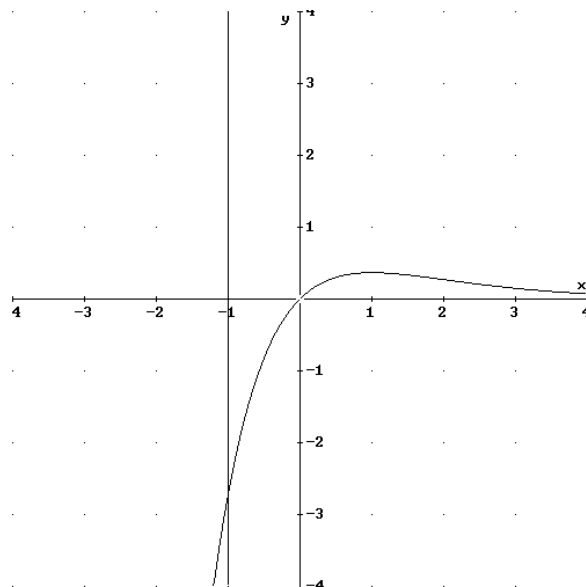
$$- P(2) = 1 \Rightarrow 4a + 2b + 1 = 1 \Rightarrow 4a + 2b = 0$$

$$- \int_0^2 (ax^2 + bx + 1) dx = \left[ \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + x \right]_0^2 = \frac{8a}{3} + 2b + 2 = \frac{1}{3}$$

Resolviendo el sistema sale que:  $P(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:  $f(x) = x \cdot e^{-x}$ . Esboza el recinto limitado por la curva  $y = f(x)$ , los ejes coordenados y la recta  $x = -1$ . Calcula su área.  
MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N



$$A = \int_{-1}^0 -x e^{-x} dx = \left[ x \cdot e^{-x} + e^{-x} \right]_{-1}^0 = 1 \text{ u}^2$$

Sea  $\ln(x)$  el logaritmo neperiano de  $x$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2}$$

a) Determina el conjunto  $D$  sabiendo que está formado por todos los puntos  $x \in \mathbb{R}$  para los que existe  $f(x)$ .

b) Usa el cambio de variable  $t = \ln(x)$  para calcular una primitiva de  $f$ .

**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.**

## R E S O L U C I Ó N

a)  $\ln(x)$  sólo existe para  $x > 0$ , por tanto, el dominio de  $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2}$  puesto que es un cociente, aparte de considerar los números  $x > 0$  hemos de quitar aquellos que anulan el denominador que en nuestro caso es  $x=1$ , ya que  $\ln(1)=0$ . Luego el dominio pedido es  $(0,1) \cup (1,\infty)$ .

b) Hacemos el cambio  $t = \ln(x) \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx \Rightarrow dx = x \cdot dt$

$$\int \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx = \int \frac{x \cdot dt}{x \cdot t^2} = \int t^{-2} dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln(x)} + C$$

Calcula  $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} dx$

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} dx = \int (x+2) dx + \int \frac{-x+5}{x^2-1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{-x+5}{x^2-1} dx$$

Calculamos las raíces del denominador:  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 ; x = 1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-x+5}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular  $A$  y  $B$  sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x = 1 \Rightarrow 4 = 2A \Rightarrow A = 2$$

$$x = -1 \Rightarrow 6 = -2B \Rightarrow B = -3$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{-3}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln(x-1) - 3\ln(x+1) + C$$

a) Determina la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sabiendo que  $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$  y que su valor mínimo es  $-12$ .

b) Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de  $f$  en los puntos de inflexión de su gráfica.

**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Los posibles máximos o mínimos son las soluciones de la ecuación:

$$f'(x) = 2x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 3$$

El mínimo está en  $x = 3$ , ya que  $f''(3) = 6 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 = 54 - 36 = 18 > 0$

$$f(x) = \int (2x^3 - 6x^2) dx = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + C$$

$$\text{Como } f(3) = -12 \Rightarrow \frac{3^4}{2} - 2 \cdot 3^3 + C = -12 \Rightarrow C = \frac{3}{2}$$

$$\text{Luego, la función es: } f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + \frac{3}{2}$$

b) Calculamos los puntos de inflexión igualando la segunda derivada a cero.

$$f''(x) = 6x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ f(x_0) = \frac{3}{2} \\ f'(x_0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 2 \\ f(x_0) = -\frac{13}{2} \\ f'(x_0) = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y + \frac{13}{2} = -8(x - 2) \Rightarrow y = \frac{-16x + 19}{2}$$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x|x-4|$ .

a) Esboza la gráfica de  $f$ .

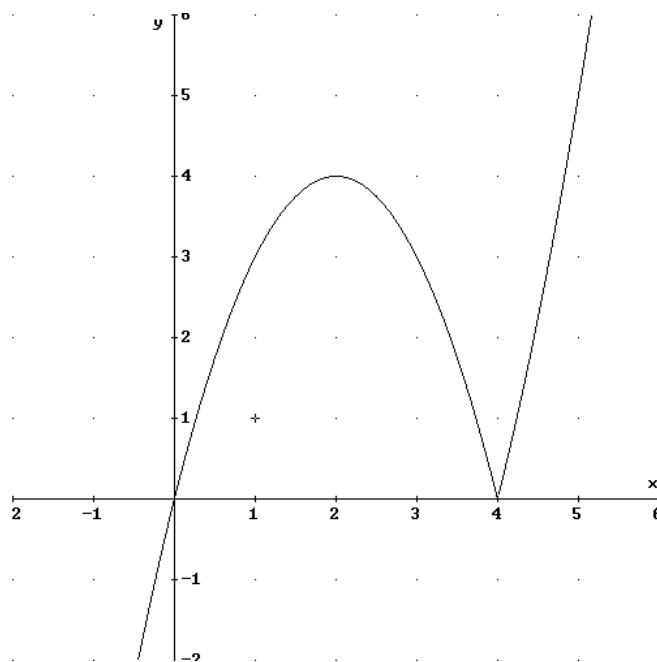
b) Estudia su derivabilidad en  $x = 4$ .

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$  y el eje de abscisas.

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

## R E S O L U C I Ó N

a) La gráfica de  $f(x) = x|x-4|$  es:



b) Abrimos la función:  $f(x) = x|x-4| = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } x \leq 4 \\ x^2 - 4x & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Como la función es continua en  $x = 4$ , estudiamos la derivabilidad en  $x = 4$ .

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } x < 4 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(4^-) = -4 \\ f'(4^+) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(4^-) \neq f'(4^+) \Rightarrow \text{No derivable}$$

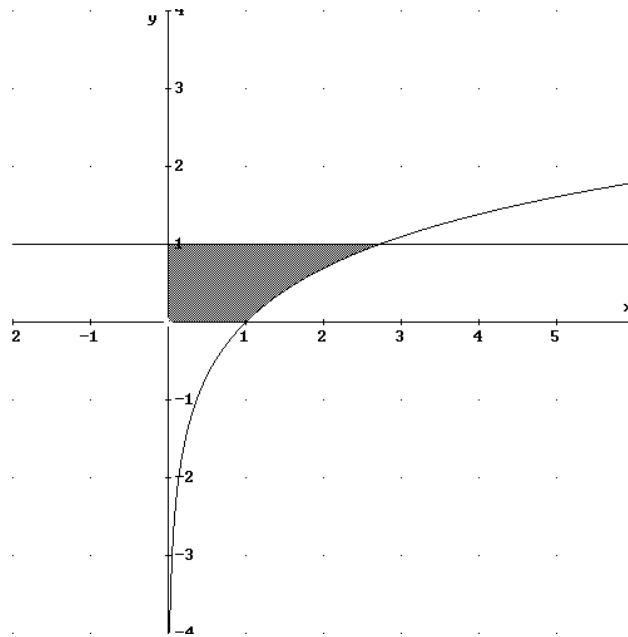
c)

$$A = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3} u^2$$

Sea  $\ln(x)$  el logaritmo neperiano de  $x$ . Esboza el recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas de las funciones  $y = 1$  e  $y = \ln(x)$ . Calcula su área.  
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

a) El recinto es:



b) Calculamos el área.

$$A = 1 + \int_1^e (1 - \ln x) dx = 1 + [2x - x \ln x]_1^e = e - 1$$

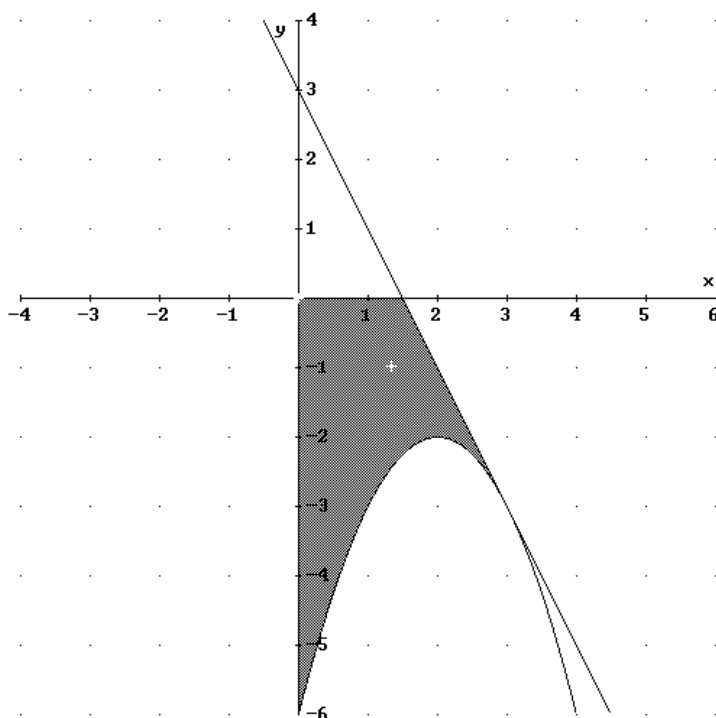


Esboza el recinto limitado por la gráfica de la parábola  $y = -(x-2)^2 - 2$ , la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa  $x = 3$ , el semieje positivo de abscisas y el semieje negativo de ordenadas. Calcula su área.  
**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la recta tangente a la parábola  $y = -(x-2)^2 - 2 = -x^2 + 4x - 6$ . La ecuación de la recta tangente será:  $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 3 \\ f(x_0) = -3 \\ f'(x_0) = -2 \end{array} \right\} y + 3 = -2 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = -2x + 3$$



Calculamos el área.

$$A = \int_0^{\frac{3}{2}} (x^2 - 4x + 6) dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 (-2x + 3 + x^2 - 4x + 6) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x \right]_0^{\frac{3}{2}} + \left[ \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_{\frac{3}{2}}^3 = \frac{27}{4} u^2$$

Calcula una primitiva de la función  $f$  definida por  $f(x) = \frac{2x^2 + 10x}{x^2 + 2x - 3}$  para  $x \neq 1$  y  $x \neq -3$ .  
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{2x^2 + 10x}{x^2 + 2x - 3} dx = \int 2 dx + \int \frac{6x + 6}{x^2 + 2x - 3} dx = 2x + \int \frac{6x + 6}{x^2 + 2x - 3} dx$$

Calculamos las raíces del denominador:  $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = -3$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{6x + 6}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3} = \frac{A(x + 3) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular  $A$  y  $B$  sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x = 1 \Rightarrow 12 = 4A \Rightarrow A = 3$$

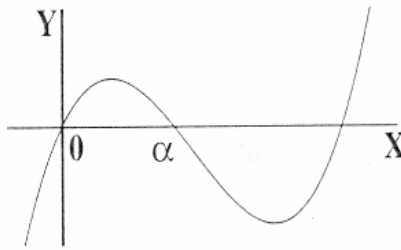
$$x = -3 \Rightarrow -12 = -4B \Rightarrow B = 3$$

Con lo cual:

$$\int \frac{2x^2 + 10x}{x^2 + 2x - 3} dx = 2x + \int \frac{3}{x - 1} dx + \int \frac{3}{x + 3} dx = 2x + 3\ln(x - 1) + 3\ln(x + 3) + C$$

Consideremos  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

a) Si  $f$  fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:



i)  $F(\alpha) = 0$

ii)  $F'(\alpha) = 0$

iii)  $F$  es creciente en  $(0, \alpha)$   $(0, \alpha)$

b) Calcula  $F(1)$  siendo  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$

**MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1 OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a)

i)  $F(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt \neq 0$  porque nos daría el área encerrada por la función  $f(x)$ , el eje OX entre  $x=0$  y  $x=\alpha$ .

ii)  $F'(x) = \left[ \int_0^\alpha f(t) dt \right]' = f(x)$ , según el teorema fundamental del cálculo integral, luego  $F'(\alpha) = f(\alpha)$  y según la gráfica se observa que  $f(\alpha) = 0$ .

iii)  $F$  es creciente en  $(0, \alpha)$  si y solo si  $F'(x) > 0$  en  $(0, \alpha)$ , pero  $F'(x) = f(x)$  que es mayor que cero en  $(0, \alpha)$ , luego  $F(x)$  es creciente en dicho intervalo.

b) Si hacemos el cambio  $t+1 = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t+1}} dt = \int \frac{2x dx}{x} = 2 \int dx = 2x = 2\sqrt{t+1}$$

$$F(1) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t+1}} dt = \left[ 2\sqrt{t+1} \right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$$

Calcula  $\int_0^1 \frac{3x^3+1}{x^2-x-2} dx$

MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{3x^3+1}{x^2-x-2} dx = \int (3x+3) dx + \int \frac{9x+7}{x^2-x-2} dx = \frac{3x^2}{2} + 3x + \int \frac{9x+7}{x^2-x-2} dx$$

Calculamos las raíces del denominador:  $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 ; x = 2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{9x+7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular  $A$  y  $B$  sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x = -1 \Rightarrow -2 = -3A \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$x = 2 \Rightarrow 25 = 3B \Rightarrow B = \frac{25}{3}$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3+1}{x^2-x-2} dx &= \int (3x+3) dx + \int \frac{9x+7}{x^2-x-2} dx = \frac{3x^2}{2} + 3x + \int \frac{9x+7}{x^2-x-2} dx = \\ &= \frac{3x^2}{2} + 3x + \int \frac{\frac{2}{3}}{x+1} dx + \int \frac{\frac{25}{3}}{x-2} dx = \frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{2}{3} \ln(x+1) + \frac{25}{3} \ln(x-2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral que nos piden valdrá:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{3x^3+1}{x^2-x-2} dx &= \left[ \frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{2}{3} \ln(x+1) + \frac{25}{3} \ln(x-2) \right]_0^1 = \\ &= \left[ \frac{3}{2} + 3 + \frac{2}{3} \ln(2) + \frac{25}{3} \ln(-1) \right] - \left[ \frac{2}{3} \ln(1) + \frac{25}{3} \ln(-2) \right] = \frac{9}{2} - \frac{23}{3} \ln 2 \end{aligned}$$