

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A

Siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x , considera la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \ln x$. Calcula:

a) $\int f(x) dx$.

b) Una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(1, 0)$.

MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a calcular la integral $I = \int x \cdot \ln x \, dx$, que es una integral por partes.

$$\begin{array}{l} u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = x \, dx; \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array}$$

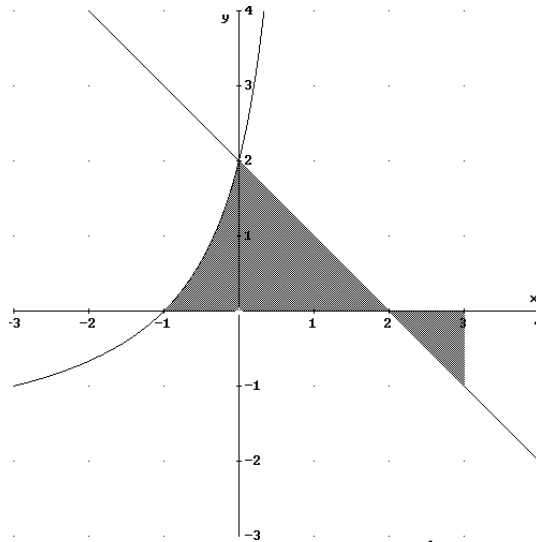
$$I = \int x \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

b) Calculamos una primitiva que pase por el punto $(1, 0)$.

$$0 = \frac{1^2}{2} \cdot \ln 1 - \frac{1}{4} 1^2 + C \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $I = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4}$

Halla el área del recinto rayado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la parte curva tiene como ecuación $y = \frac{2x+2}{1-x}$



MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$A_1 = \int_{-1}^0 \frac{2x+2}{1-x} dx = \int_{-1}^0 \left(-2 + \frac{4}{1-x} \right) dx = [-2x - 4 \ln(1-x)]_{-1}^0 = 4 \ln 2 - 2$$

$$A_2 = \int_0^2 (-x+2) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = 2$$

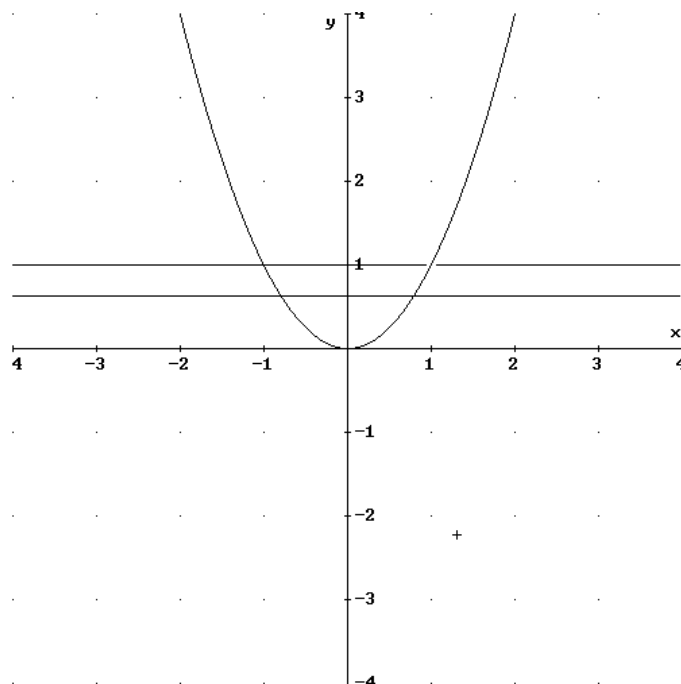
$$A_3 = \int_2^3 0 - (-x+2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 = \frac{1}{2}$$

El área pedida es:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 4 \ln 2 - 2 + 2 + \frac{1}{2} = 4 \ln 2 + \frac{1}{2}$$

Se quiere dividir la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ en dos regiones de igual área mediante una recta $y = a$. Hallar el valor de a .
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos el área encerrada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$.

$$\text{Área} = 2 \cdot \int_0^1 (1 - x^2) dx = 2 \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \cdot \left[1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{4}{3} u^2$$

Calculamos los puntos de corte de la parábola $y = x^2$ y la recta $y = a$.

$$x^2 = a \Rightarrow x = \pm \sqrt{a}$$

$$\frac{2}{3} = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = 2 \cdot \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{a}} = 2 \cdot \left[a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} \right] = \frac{4}{3} a\sqrt{a} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = \begin{cases} 5x+10 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

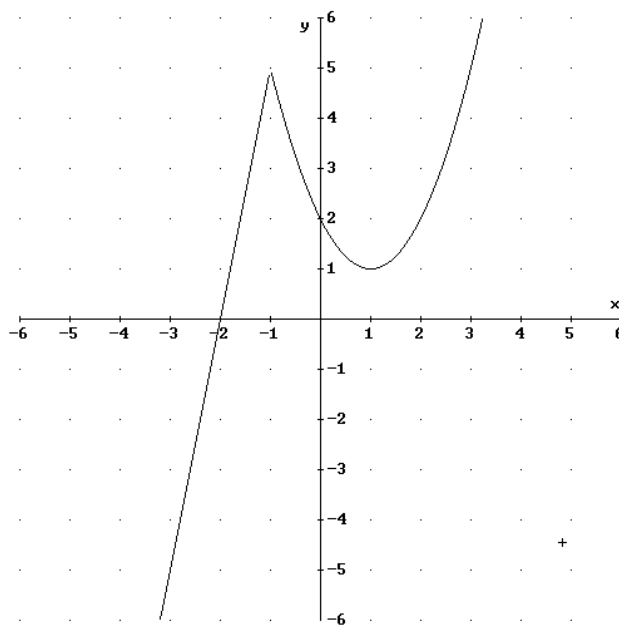
a) Esboza la gráfica de f .

b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a)



b)

$$\text{Área} = \int_{-2}^{-1} (5x+10) dx + \int_{-1}^3 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[\frac{5x^2}{2} + 10x \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_{-1}^3 = \frac{5}{2} + \frac{28}{3} = \frac{71}{6} u^2$$

Considera la función $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} a(x-1) & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Determina el valor de a sabiendo que f es derivable.

b) Calcula $\int_0^2 f(x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 2. EJERCICIO 1 OPCIÓN B.

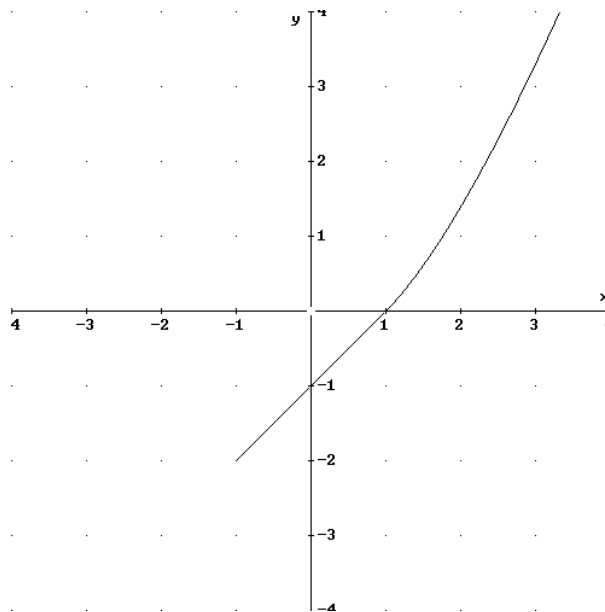
R E S O L U C I Ó N

a) Para que sea derivable primero tiene que ser continua, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} a \cdot (x-1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x \cdot \ln x = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 1^-} = \lim_{x \rightarrow 1^+} = 0 \Rightarrow \text{Continua}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \ln x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = a \\ f'(1^+) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1$$



b)

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 x \cdot \ln x dx = \left[\frac{x}{2} - x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{2} - 1 + 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2 \ln 2 - \frac{5}{4}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por : $f(x) = |x^2 - 1|$

a) Esboza la gráfica de f .

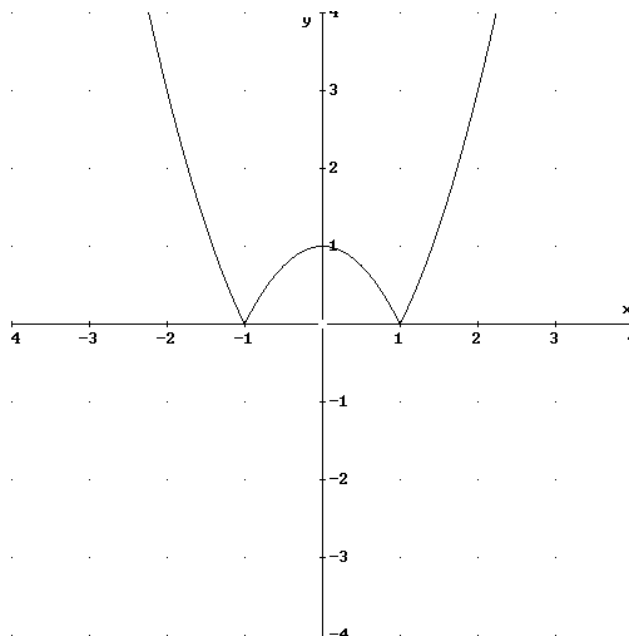
b) Estudia la derivabilidad de f .

c) Calcula $\int_0^2 f(x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a)



b) Abrimos la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \text{ la función es continua en } \mathbb{R} . \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -1 \\ -2x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1^-) = -2 \\ f'(-1^+) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(-1^-) \neq f'(-1^+) \quad ; \quad \left. \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

Luego, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

c)

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 = 2$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

b) Determina los extremos relativos α y β de f con $\alpha < \beta$ y calcula $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = -6x^2 - 18x - 12 = 0 \Rightarrow x = -2 ; x = -1$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, \infty)$
Signo y'	-	+	-
Función	D	C	D

Máximo en $(-1, 5)$; mínimo en $(-2, 4)$

b)

$$\int_{-2}^{-1} (-2x^3 - 9x^2 - 12x) dx = \left[-\frac{2x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} \right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2} + 3 - 6 + 8 - 24 + 24 = \frac{9}{2}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1-mx-x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Determina m sabiendo que f es derivable.

b) Calcula $\int_{-1}^1 f(x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 4. EJERCICIO 1 OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que sea derivable primero tiene que ser continua, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 1-mx-x^2 = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0^-} = \lim_{x \rightarrow 0^+} = 1 \Rightarrow \text{Continua}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ -m-2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = -m \end{array} \right\} \Rightarrow m = -1$$

b)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x} dx + \int_0^1 (1+x-x^2) dx = [-\ln(1-x)]_{-1}^0 + \left[x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \ln 2 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \ln 2 + \frac{7}{6}$$

Considera la función $f : [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{16}{(x+1)^2} & \text{si } 1 < x < 3 \\ 4-x & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$

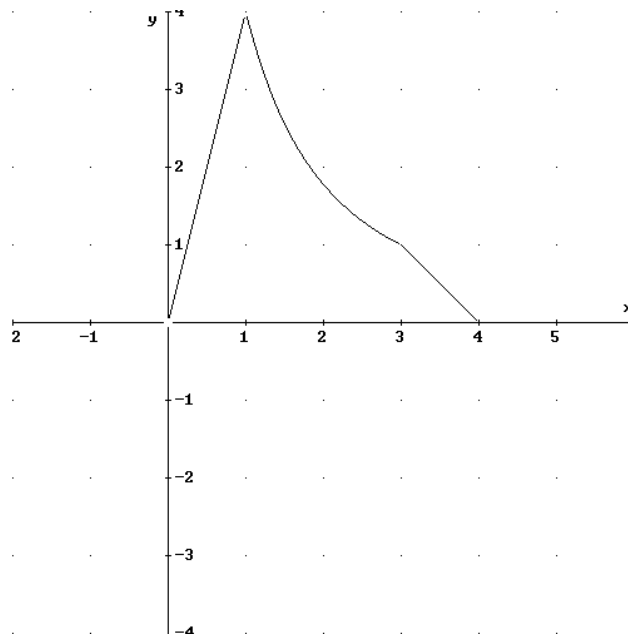
a) Esboza la gráfica de f .

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

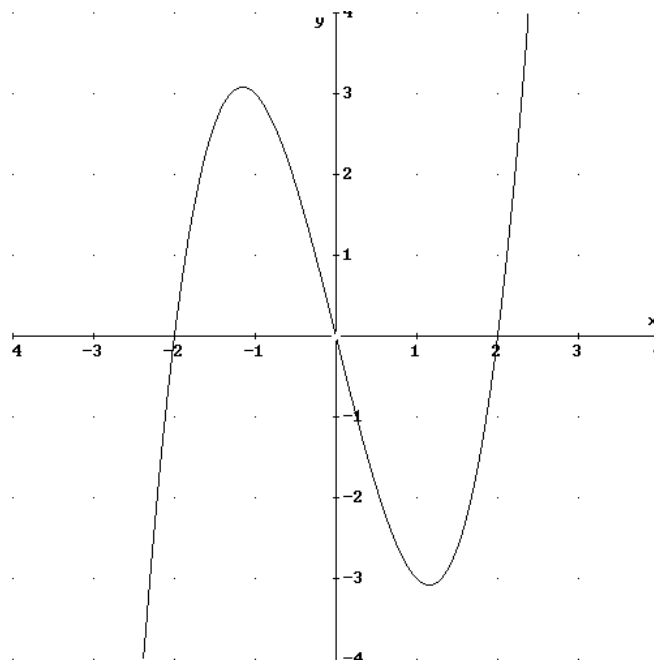


b)

$$\text{Área} = \int_0^1 4x \, dx + \int_1^3 \frac{16}{(x+1)^2} \, dx + \int_3^4 (4-x) \, dx = \left[2x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{16}{x+1} \right]_1^3 + \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_3^4 = 2 + 4 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2} \, u^2$$

Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2001. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Vamos a calcular los puntos de corte de la función $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas $y = 0$
 $x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2 ; x = -2$

Por lo tanto, el área pedida será:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (-x^3 + 4x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 = \\ &= (-4 + 8) + (-4 + 8) = 8 u^2 \end{aligned}$$

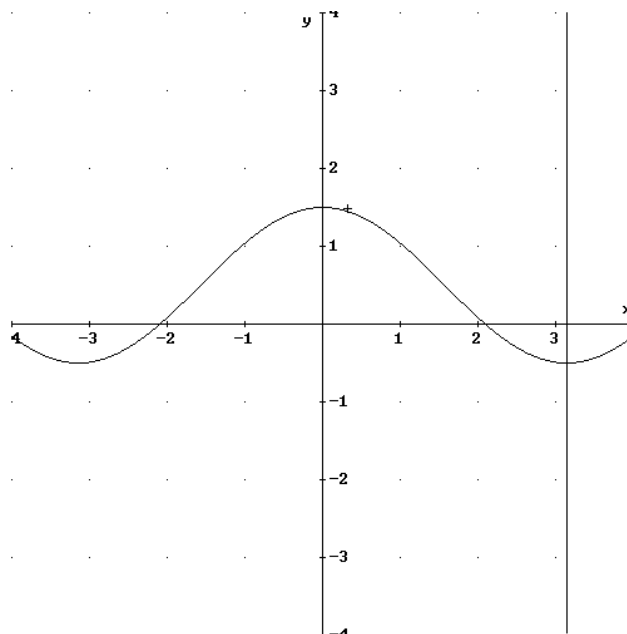
a) Dibuja el recinto limitado por la curva $y = \frac{1}{2} + \cos x$, los ejes de coordenadas y la recta $x = \pi$.

b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2001. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



b) Vamos a calcular los puntos de corte de la función $y = \frac{1}{2} + \cos x$ y el eje de abscisas $y = 0$

$$\frac{1}{2} + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

Por lo tanto, el área pedida será:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} + \cos x \right) dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left(-\frac{1}{2} - \cos x \right) dx = \left[\frac{x}{2} + \operatorname{sen} x \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} + \left[-\frac{x}{2} - \operatorname{sen} x \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \\ &= \left(\frac{2\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{2\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \text{ u}^2 \end{aligned}$$