PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

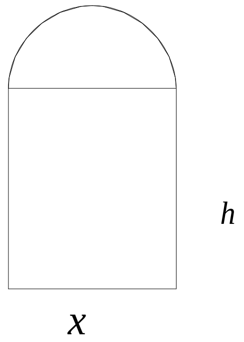
2017

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B

Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados. Si es posible, determina la base *x* para que el perímetro sea mínimo.



MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea mínimo: $P_{\min} = x + 2h + \pi \dfrac{x}{2} = 2h + \left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)x$

b) Relación entre las variables: $16 = x \cdot h + \dfrac{\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow 16 = x \cdot h + \dfrac{\pi x^2}{8} \Rightarrow h = \dfrac{128 - \pi x^2}{8x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$P_{\min} = 2h + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot x = 2 \cdot \frac{128 - \pi x^2}{8x} + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot x = \frac{128 - \pi x^2}{4x} + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot x = \frac{128 + (\pi + 4)x^2}{4x}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$P'_{\min} = \frac{2 \cdot (\pi + 4)x \cdot 4x - 4 \cdot \left(128 + (\pi + 4)x^2\right)}{16x^2} = \frac{4 \cdot (\pi + 4)x^2 - 512}{16x^2} = \frac{(\pi + 4)x^2 - 128}{4x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{128}{(\pi + 4)}}$$

e) Calculamos la segunda derivada:

$$P'' = \frac{2 \cdot (\pi + 4)x \cdot 4x^2 - 8x \cdot \left((\pi + 4)x^2 - 128\right)}{16x^4} = \frac{128}{2x^3} = \frac{64}{x^3}$$

$$P''\left(x = \sqrt{\frac{128}{(\pi + 4)}}\right) > 0 \Rightarrow \text{ Mínimo}$$

Luego, el valor de la base es: $x = \sqrt{\dfrac{128}{(\pi + 4)}} = 4'23\ m$

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ para $x\neq 1$
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de *f*. Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)
MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntotas Verticales: La recta $x=1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1}=\infty\Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y=x+1$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x^2+x}{x-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x-1}\right]=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1}\right]=1$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{2x\cdot(x-1)-1\cdot x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	+	—	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo $(0,0)$ $\quad\downarrow$ mínimo $(2,4)$

Creciente: $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$
Decreciente: $(0,2)$
Máximo $(0,0)$
mínimo $(2,4)$