PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

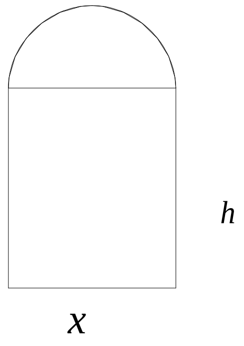
2017

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados. Si es posible, determina la base *x* para que el perímetro sea mínimo.



MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea mínimo: $P_{\min} = x + 2h + \pi\frac{x}{2} = 2h + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x$

b) Relación entre las variables: $16 = x \cdot h + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow 16 = x \cdot h + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow h = \frac{128 - \pi x^2}{8x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$P_{\min} = 2h + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot x = 2 \cdot \frac{128 - \pi x^2}{8x} + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot x = \frac{128 - \pi x^2}{4x} + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot x = \frac{128 + (\pi + 4)x^2}{4x}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$P'_{\min} = \frac{2 \cdot (\pi + 4)x \cdot 4x - 4 \cdot \left(128 + (\pi + 4)x^2\right)}{16x^2} = \frac{4 \cdot (\pi + 4)x^2 - 512}{16x^2} = \frac{(\pi + 4)x^2 - 128}{4x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{128}{(\pi + 4)}}$$

e) Calculamos la segunda derivada:

$$P'' = \frac{2 \cdot (\pi + 4)x \cdot 4x^2 - 8x \cdot \left((\pi + 4)x^2 - 128\right)}{16x^4} = \frac{128}{2x^3} = \frac{64}{x^3}$$

$$P''\left(x = \sqrt{\frac{128}{(\pi + 4)}}\right) > 0 \Rightarrow \text{ Mínimo}$$

Luego, el valor de la base es: $x = \sqrt{\frac{128}{(\pi + 4)}} = 4'23\ m$

Considera la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ para $x\neq 1$

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de *f*. Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntotas Verticales: La recta $x=1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1}=\infty \Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y=x+1$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x^2+x}{x-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x-1}\right]=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1}\right]=1$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{2x\cdot(x-1)-1\cdot x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	+	—	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo $(0,0)$ $\downarrow$ mínimo $(2,4)$

Creciente: $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

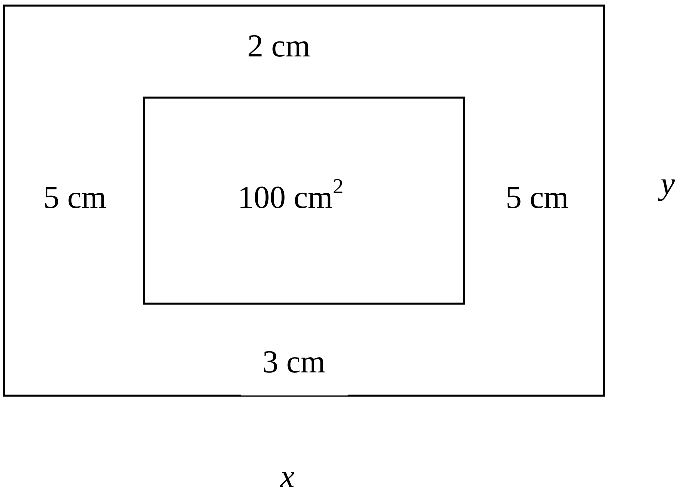
Decreciente: $(0,2)$

Máximo $(0,0)$

mínimo $(2,4)$

Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm^2, el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno. Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



Paso 1: Escribimos la función que queremos que sea mínima: $S_{\min} = x \cdot y$

Paso 2: Escribimos la relación entre las variables: $100 = (x-10)\cdot(y-5) \Rightarrow y = \dfrac{50+5x}{x-10}$

Paso 3: Sustituimos: $S_{\min} = x \cdot y = x \cdot \dfrac{50+5x}{x-10} = \dfrac{50x+5x^2}{x-10}$

Paso 4: Derivamos e igualamos a cero:

$$S' = \frac{5x^2-100x-500}{(x-10)^2} = 0 \Rightarrow 5x^2-100x-500 = 0 \Rightarrow x = 24'14 \ ; \ x = -4'14$$

Como es una longitud, el valor es: $x = 24'14$

Paso 5: Calculamos la 2ª derivada y comprobamos que corresponde a un mínimo.

$$S'' = \frac{2000}{(x-10)^3} \Rightarrow S''(x = 24'14) = 0'70 \Rightarrow mínimo$$

Luego las dimensiones de la tarjeta son: $x = 24'14 \ cm \ ; \ y = 12'07 \ cm$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$
a) Estudia y determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=0\Rightarrow e^{x}-e^{-x}=0\Rightarrow x=0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
Signo y'	—	+
Función	D	C

$\downarrow$
mínimo $(0,1)$

La función es decreciente en $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(0,1)$

b) Calculamos $f(0)=1$ y $f'(0)=0$

La recta normal en $x=0$ es: $y-f(0)=-\dfrac{1}{f'(0)}\cdot(x-0)\Rightarrow y-1=-\dfrac{1}{0}(x-0)\Rightarrow x=0$