PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2017

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

Considera el punto $P(1,-1,0)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.
b) Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.
MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

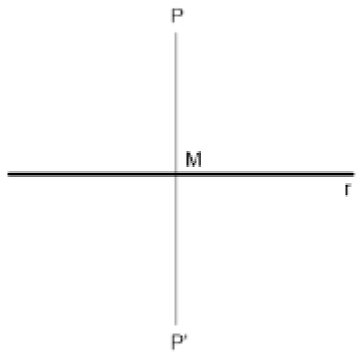
R E S O L U C I Ó N

a) De la recta: $r \equiv \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$ sabemos un punto $A = (1,-2,0)$ y su vector director $\vec{u} = (3,0,1)$.

El plano que nos piden viene definido por el punto $P = (1,-1,0)$ y los vectores directores $\vec{u} = (3,0,1)$ y $\vec{PA} = (0,-1,0)$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y+1 & 0 & -1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+3z+1=0$$

b)



Cualquier punto de la recta tiene de coordenadas $M = (1+3t,-2,t)$. Calculamos el vector $\vec{PM} = (1+3t-1,-2+1,t-0) = (3t,-1,t)$. Queremos que el vector $\vec{PM}$ sea perpendicular al vector director de la recta $\vec{u} = (3,0,1)$, luego: $\vec{PM}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow (3t,-1,t)\cdot(3,0,1) = 0 \Rightarrow 9t+t=0 \Rightarrow t=0$

Por lo tanto el punto M tiene de coordenadas: $M = (1,-2,0)$.
Si llamamos al punto simétrico $P' = (a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(1,-1,0)+(a,b,c)}{2} = (1,-2,0) \Rightarrow P' = (1,-3,0)$$

Considera los vectores $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(0,2,1)$ y $\vec{w}=(m,1,n)$. Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

a) Halla m y n sabiendo que $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) Para $n=1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si los vectores son linealmente dependientes, su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2n - 2m - 1 = 0$$

Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ $\Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow m + n = 0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, obtenemos que: $m = \frac{1}{4}$; $n = -\frac{1}{4}$

b) El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores, es decir:

$$V = 10 = \frac{1}{6}\ Valor\ absoluto\ de \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|1-2m| \Rightarrow |1-2m| = 60 \Rightarrow \begin{cases} 1-2m = 60 \Rightarrow m = -\frac{59}{2} \\ -1+2m = 60 \Rightarrow m = \frac{61}{2} \end{cases}$$