PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2017

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera el punto $P(1,-1,0)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2 \\ z=t \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.
b) Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.
MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

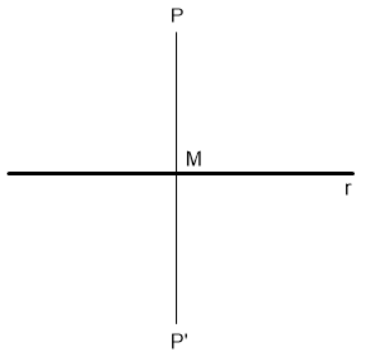
R E S O L U C I Ó N

a) De la recta: $r \equiv \begin{cases} x=1+3t \\ y=-2 \\ z=t \end{cases}$ sabemos un punto $A=(1,-2,0)$ y su vector director $\vec{u}=(3,0,1)$.

El plano que nos piden viene definido por el punto $P=(1,-1,0)$ y los vectores directores $\vec{u}=(3,0,1)$ y $\vec{PA}=(0,-1,0)$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y+1 & 0 & -1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -x+3z+1=0$$

b)



Cualquier punto de la recta tiene de coordenadas $M=(1+3t,-2,t)$. Calculamos el vector $\vec{PM}=(1+3t-1,-2+1,t-0)=(3t,-1,t)$. Queremos que el vector $\vec{PM}$ sea perpendicular al vector director de la recta $\vec{u}=(3,0,1)$, luego: $\vec{PM}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow (3t,-1,t)\cdot(3,0,1)=0 \Rightarrow 9t+t=0 \Rightarrow t=0$

Por lo tanto el punto M tiene de coordenadas: $M=(1,-2,0)$.
Si llamamos al punto simétrico $P'=(a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(1,-1,0)+(a,b,c)}{2}=(1,-2,0) \Rightarrow P'=(1,-3,0)$$

Considera los vectores $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(0,2,1)$ y $\vec{w}=(m,1,n)$. Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

a) Halla m y n sabiendo que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) Para $n=1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si los vectores son linealmente dependientes, su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2n-2m-1=0$$

Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ $\Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow m+n=0$

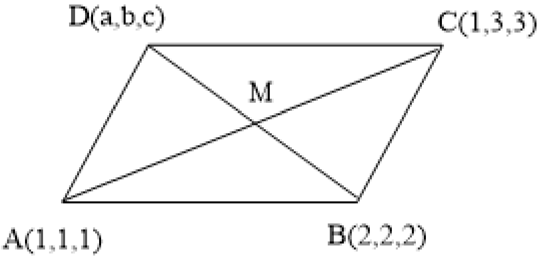
Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, obtenemos que: $m=\frac{1}{4}$; $n=-\frac{1}{4}$

b) El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores, es decir:

$$V=10=\frac{1}{6}\ Valor\ absoluto\ de \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|1-2m| \Rightarrow |1-2m|=60 \Rightarrow \begin{cases} 1-2m=60 \Rightarrow m=-\dfrac{59}{2} \\ -1+2m=60 \Rightarrow m=\dfrac{61}{2} \end{cases}$$

Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo *ABCD*.
a) Calcula el área del paralelogramo.
b) Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.
c) Calcula las coordenadas del vértice *D*.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,2,2)$ y el área del paralelogramo es:

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=(0,-2,2)$$

$$\acute{A}rea=m\acute{o}dulo\ \left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(0)^2+(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{8}\ u^2$$

b) Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,2,2)$ y la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 0\\ y-1 & 1 & 2\\ z-1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow y-z=0$$

c) Calculamos las coordenadas del punto medio M

$$M=\frac{A+C}{2}\Rightarrow M=\frac{(1,1,1)+(1,3,3)}{2}=(1,2,2)$$

Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M=\frac{B+D}{2}\Rightarrow(1,2,2)=\frac{(2,2,2)+(a,b,c)}{2}\Rightarrow D=(0,2,2)$$

Considera el punto $P(0,1,1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x-2y=-5 \\ z=2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.
b) Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

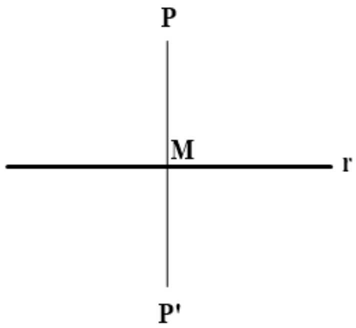
a) La ecuación del haz de planos es: $x-2y+5+k(z-2)=0$ **.**

Como queremos el plano que pasa por $P(0,1,1)$, tenemos que:

$$0-2\cdot 1+5+k(1-2)=0 \Rightarrow k=3$$

luego, el plano es: $x-2y+5+3(z-2)=0 \Rightarrow x-2y+3z-1=0$

b)



Pasamos la recta r a paramétricas: $\begin{cases} x-2y=-5 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5+2t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$, con lo cual:

$$M=(-5+2t,t,2) \; ; \; \vec{u}=(2,1,0)$$

Para calcular el simétrico del punto $P=(0,1,1)$ respecto de la recta, el vector $\vec{PM}=(-5+2t,t-1,1)$ y el vector $\vec{u}=(2,1,0)$ tienen que ser perpendiculares, luego:

$$\vec{PM}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow (-5+2t,t-1,1)\cdot(2,1,0)=0 \Rightarrow -10+4t+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{11}{5} \Rightarrow M=\left(-\frac{3}{5},\frac{11}{5},2\right)$$

El punto simétrico cumple que:

$$\frac{P+P'}{2}=M \Rightarrow \left(\frac{0+a}{2},\frac{1+b}{2},\frac{1+c}{2}\right)=\left(-\frac{3}{5},\frac{11}{5},2\right) \Rightarrow P'=\left(-\frac{6}{5},\frac{17}{5},3\right)$$