

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO**

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Dada la recta  $r$  definida por:  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a  $r$ .

b) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a  $r$ .

MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

### R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a implícitas:  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

Calculamos la ecuación del haz de planos:

$$3x - 2y - 5 + k(x - 2z + 3) = 0 \Rightarrow (3+k)x - 2y - 2kz - 5 + 3k = 0$$

Como queremos que pase por el origen, tenemos:

$$(3+k) \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 2k \cdot 0 - 5 + 3k = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{3}$$

Luego, el plano que nos piden es:

$$3x - 2y - 5 + \frac{5}{3}(x - 2z + 3) = 0 \Rightarrow 7x - 3y - 5z = 0$$

b) El vector director de la recta es el vector normal del plano, luego, su ecuación será:

$$2x + 3y + z + D = 0$$

Como queremos que pase por el origen:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

Luego, el plano que nos piden es:  $2x + 3y + z = 0$

Dados los puntos  $A(2,1,1)$  y  $B(0,0,1)$ , halla los puntos  $C$  en el eje  $OX$  tales que el área del triángulo de vértices  $A, B$  y  $C$  es 2.

MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

### R E S O L U C I Ó N

El punto  $C$  como está en el eje  $OX$ , tendrá de coordenadas  $C(a,0,0)$ . Calculamos los vectores

$\vec{AB} = (-2, -1, 0)$  y  $\vec{AC} = (a - 2, -1, -1)$  y calculamos su producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ a-2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1, -2, a)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \sqrt{1+4+a^2} \Rightarrow a = \pm \sqrt{11}$$

Luego, el punto  $C$  puede ser  $C(\sqrt{11}, 0, 0)$  ó  $C(-\sqrt{11}, 0, 0)$

Los puntos  $A = (-2, 3, 1)$ ,  $B = (2, -1, 3)$  y  $C = (0, 1, -2)$  son vértices consecutivos del paralelogramo  $ABCD$ .

a) Halla las coordenadas del vértice  $D$ .

b) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por  $B$  y es paralela a la diagonal  $AC$ .

c) Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

**MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a) Si  $ABCD$  son los vértices de un paralelogramo. Los vectores libres  $\vec{AB}$  y  $\vec{DC}$  son iguales:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} = (4, -4, 2) \\ \vec{DC} = (-x, 1-y, -2-z) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow D = (-4, 5, -4)$$

b) La recta pasa por el punto  $B = (2, -1, 3)$  y como vector director el  $\vec{AC} = (2, -2, -3)$ . Su ecuación continua es

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-3}$$

c) El plano viene definido por el punto  $B = (2, -1, 3)$  y los vectores  $\vec{BA} = (-4, 4, -2)$  y

$\vec{BC} = (-2, 2, -5)$ , luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -4 & -2 \\ y+1 & 4 & 2 \\ z-3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - 1 = 0$$

Sea la recta  $r$  dada por  $\begin{cases} 2x + y - mz = 2 \\ x - y - z = -m \end{cases}$  y el plano  $\pi$  definido por  $x + my - z = 1$

a) ¿Existe algún valor de  $m$  para el que  $\pi$  y  $r$  son paralelos?.

b) ¿Para qué valor de  $m$  está la recta contenida en el plano?.

c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando  $m = 0$ ?

**MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.**

## R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1-m, 2-m, -3)$$

Si la recta es paralela al plano el producto escalar del vector director de la recta  $\vec{u} = (-1-m, 2-m, -3)$  y el vector normal del plano  $\vec{n} = (1, m, -1)$  debe valer cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow -1-m+2m-m^2+3=0 \Rightarrow -m^2+m+2=0 \Rightarrow m=-1; m=2$$

b) Formamos el sistema con las tres ecuaciones. Para que la recta esté contenida en el plano el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada debe valer 2.

$$\begin{cases} 2x + y - mz = 2 \\ x - y - z = -m \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 + m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1; m = 2 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si  $m = -1 \Rightarrow \text{Rango}(M) = 2 \Rightarrow$  Recta contenida en el plano

Si  $m = 2 \Rightarrow \text{Rango}(M) = 3 \Rightarrow$  La recta no está contenida en el plano

c) Si  $m = 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 \Rightarrow$  La recta es secante con el plano.

Considera la recta  $r$  definida por  $\begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 3 \end{cases}$  y la recta  $s$  definida por  $\begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de  $r$  y  $s$ .

b) Halla la ecuación general de un plano que contiene a  $s$  y es paralelo a  $r$ .

**MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Formamos el sistema con las cuatro ecuaciones: 
$$\begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 3 \\ 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(M) = 4$$

Luego, las rectas se cruzan.

b) Pasamos las rectas a paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = 3 - 3y \end{cases} \Rightarrow A = (0, 0, 3); \vec{u} = (0, 1, -3)$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = -3 + 2x \end{cases} \Rightarrow B = (0, 0, -3); \vec{v} = (1, 0, 2)$$

El plano que nos piden viene definido por  $B = (0, 0, -3); \vec{v} = (1, 0, 2); \vec{u} = (0, 1, -3)$ , luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z+3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -2x + 3y + z + 3 = 0$$

Sea la recta  $r$  definida por  $\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ x - y = 0 \end{array} \right\}$  y sean los planos  $\pi_1$  de ecuación  $x + y + z = 0$ , y  $\pi_2$ , de ecuación  $y + z = 0$ . Halla la ecuación de la recta contenida en el plano  $\pi_1$ , que es paralela al plano  $\pi_2$  y que corta a la recta  $r$ .

**MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Como la recta pedida está contenida en el plano  $\pi_1$  y es paralela al plano  $\pi_2$ , su vector director tiene que ser perpendicular a los vectores normales de dichos planos, luego:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$$

Cualquier punto de la recta  $r$  tiene de coordenadas  $(1, 1, a)$ , por lo tanto, la recta pedida tendrá de

ecuación:  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = a + t \end{cases}$  y como está contenida en el plano  $\pi_1$  debe verificar su ecuación. Luego:

$$x + y + z = 0 \Rightarrow 1 + 1 - t + a + t = 0 \Rightarrow a = -2$$

La recta que nos piden tiene de ecuación:  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$

Se sabe que los planos de ecuaciones:  $x + 2y + bz = 1$ ;  $2x + y + bz = 0$ ;  $3x + 3y - 2z = 1$  se cortan en una recta  $r$ .

a) Calcula el valor de  $b$ .

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de  $r$ .

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

## R E S O L U C I Ó N

a) Para que los tres planos se corten en una recta, el sistema formado por las tres ecuaciones debe tener infinitas soluciones, es decir,  $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(M) = 2$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & b \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 6b + 6 = 0 \Rightarrow b = -1$$

b) Para calcular las ecuaciones de la recta tomamos las dos últimas ecuaciones de sistema.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = z \\ 3x + 3y = 1 + 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{z}{3} \\ y = \frac{2}{3} + \frac{z}{3} \\ z = z \end{cases}$$

Dados los puntos  $A=(2,1,-1)$  y  $B=(-2,3,1)$  y la recta  $r$  definida por  $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{cases}$  halla las coordenadas de un punto de la recta  $r$  que equidiste de los puntos  $A$  y  $B$ .  
**MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas.  $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5+2t}{3} \\ y = \frac{-2-t}{3} \\ z = t \end{cases}$

Cualquier punto de la recta  $r$  tendrá de coordenadas  $C = \left( \frac{-5+2t}{3}, \frac{-2-t}{3}, t \right)$ . Para que equidiste de  $A$  y  $B$ , el módulo de los vectores  $\vec{AC} = \left( \frac{-11+2t}{3}, \frac{-5-t}{3}, t+1 \right)$  y  $\vec{BC} = \left( \frac{1+2t}{3}, \frac{-11-t}{3}, t-1 \right)$  deben ser iguales, luego:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{-11+2t}{3}\right)^2 + \left(\frac{-5-t}{3}\right)^2 + (t+1)^2} &= \sqrt{\left(\frac{1+2t}{3}\right)^2 + \left(\frac{-11-t}{3}\right)^2 + (t-1)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{121+4t^2-44t}{9} + \frac{25+t^2+10t}{9} + t^2+1+2t &= \frac{1+4t^2+4t}{9} + \frac{121+t^2+44t}{9} + t^2+1-2t \Rightarrow \\ \Rightarrow -24t &= -24 \Rightarrow t = 1 \end{aligned}$$

Luego, el punto que nos piden es:  $C = \left( \frac{-5+2t}{3}, \frac{-2-t}{3}, t \right) = \left( \frac{-5+2 \cdot 1}{3}, \frac{-2-1}{3}, 1 \right) = (-1, -1, 1)$

*Otra forma:* Calculamos la ecuación del plano mediador, es decir, el plano perpendicular a la recta que pasa por  $A$  y  $B$  por el punto medio del segmento  $AB$ .

El vector normal del plano es el vector  $\vec{AB} = (-4, 2, 2)$ , luego, la ecuación de todos los planos perpendiculares a la recta que pasa por  $A$  y  $B$  es:  $-4x + 2y + 2z + D = 0$  como queremos el que pasa por el punto medio del segmento  $AB$ ,  $(0, 2, 0)$ , tenemos que:

$$-4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow -4x + 2y + 2z - 4 = 0$$

El punto que nos piden, es el punto de corte de la recta  $r$  con el plano mediador, luego, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la recta  $r$  y el plano, tenemos que:

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ 3x - 2z = -5 \\ -4x + 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (-1, -1, 1)$$

Se considera la recta  $r$  definida por  $mx = y = z + 2$  ( $m \neq 0$ ), y la recta  $s$  definida por

$$\frac{x-4}{4} = y-1 = \frac{z}{2}$$

a) Halla el valor de  $m$  para el que  $r$  y  $s$  son perpendiculares.

b) Deduce razonadamente si existe algún valor de  $m$  para el que  $r$  y  $s$  son paralelas.

**MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores directores de las rectas:  $\vec{u} = \left(\frac{1}{m}, 1, 1\right)$  y  $\vec{v} = (4, 1, 2)$ . Si las rectas son perpendiculares el producto escalar de los dos vectores debe valer 0, luego:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{m}, 1, 1\right) \cdot (4, 1, 2) = 0 \Rightarrow \frac{4}{m} + 1 + 2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

b) Si las rectas son paralelas, sus vectores directores deben tener las componentes proporcionales, luego:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Imposible}$$

Considera los puntos  $A = (2, 0, 1)$ ,  $B = (-1, 1, 2)$ ,  $C = (2, 2, 1)$  y  $D = (3, 1, 0)$ .

a) Calcula la ecuación del plano  $\pi$  que contiene a los puntos  $B, C$  y  $D$ .

b) Halla el punto simétrico de  $A$  respecto del plano  $\pi$ .

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

a) El plano  $\pi$ , viene definido por el punto  $B = (-1, 1, 2)$  y los vectores  $\vec{BC} = (3, 1, -1)$  y  $\vec{BD} = (4, 0, -2)$ . Luego, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 2z - 2 = 0$$

b) Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto  $A$  es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

$$\text{Vector normal del plano} = \text{vector director de la recta} = (1, -1, 2)$$

La ecuación paramétrica de la recta será: 
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano ( $M$ ); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$2 + t + t + 2 + 4t - 2 = 0 \Rightarrow 6t = -2 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

luego las coordenadas del punto  $M$  son: 
$$\left(2 - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Como el punto  $M$  es el punto medio del segmento  $AA'$ , si llamamos  $(a, b, c)$  a las coordenadas del punto  $A'$ , se debe verificar que:

$$\frac{2+a}{2} = \frac{5}{3}; a = \frac{4}{3}; \frac{0+b}{2} = \frac{1}{3}; b = \frac{2}{3}; \frac{1+c}{2} = \frac{1}{3}; c = -\frac{1}{3} \Rightarrow A' = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Sea la recta  $s$  dada por  $\begin{cases} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano  $\pi_1$  que es paralelo a la recta  $s$  y que contiene a la recta  $r$ , dada por  $x - 1 = -y + 2 = z - 3$

b) Estudia la posición relativa de la recta  $s$  y el plano  $\pi_2$ , de ecuación  $x + y = 3$ , y deduce la distancia entre ambos.

**MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta  $s$  a paramétricas

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + z \\ y = \frac{3 - z}{2} \\ z = z \end{cases} \Rightarrow A = (-1, \frac{3}{2}, 0); \vec{u} = (1, -\frac{1}{2}, 1)$$

Pasamos la recta  $r$  a continua

$$x - 1 = -y + 2 = z - 3 \Rightarrow \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 3}{1} \Rightarrow B = (1, 2, 3); \vec{v} = (1, -1, 1)$$

El plano que nos piden viene definido por:  $B = (1, 2, 3); \vec{v} = (1, -1, 1); \vec{u} = (1, -\frac{1}{2}, 1)$ , luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & 1 & 1 \\ y - 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ z - 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - z + 2 = 0$$

b) Formamos el sistema con las tres ecuaciones.

$\begin{cases} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } M = 3 \Rightarrow$  La recta y el plano son secantes, luego, la distancia es cero.

Dados los puntos  $A = (1,1,0)$  ,  $B = (1,1,2)$  y  $C = (1,-1,1)$ .

a) Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan.

b) Halla la ecuación del plano que contiene el punto  $A$  y es perpendicular a la recta determinada por  $B$  y  $C$ .

MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

## R E S O L U C I Ó N

a) Para que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  no estén alineados los vectores  $\vec{AB} = (0,0,2)$  y  $\vec{AC} = (0,-2,1)$  no deben ser proporcionales. Vemos que efectivamente no son proporcionales, luego, los tres puntos no están alineados.

Calculamos el producto vectorial de los vectores  $\vec{AB} = (0,0,2)$  y  $\vec{AC} = (0,-2,1)$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-4, 0, 0)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{16} = 2 \text{ u}^2$$

b) El vector normal del plano que nos piden es  $\vec{BC} = (0,-2,-1)$  y pasa por el punto  $A$ , luego:

$$-2y - z + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = 2 \Rightarrow -2y - z + 2 = 0$$