PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2006

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera el plano π de ecuación $2x+y-z+2=0$ y la recta r de ecuación $\dfrac{x-5}{-2}=y=\dfrac{z-6}{m}$
a) Halla la posición relativa de r y π según los valores del parámetro m.
b) Para $m=-3$, halla el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.
c) Para $m=-3$, halla el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.
MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Podemos pasar la ecuación de la recta r a implícitas $\dfrac{x-5}{-2}=y=\dfrac{z-6}{m} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ mx+2z=12+5m \end{cases}$

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=-2 \\ x+2y=5 \\ mx+2z=12+5m \end{array}\right\}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix}=6+2m=0 \Rightarrow m=-3$$

	R(A)	R(M)	
$m=-3$	2	3	Recta paralela al plano.
$m\neq-3$	3	3	Recta secante al plano.

b) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta r es:

$$x+2y-5+k(-3x+2z+3)=0 \Rightarrow (1-3k)x+2y+2kz-5+3k=0$$

El vector normal de este plano $(1-3k,2,2k)$ y el vector normal del plano π $(2,1,-1)$, tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar vale 0.

$$(1-3k,2,2k)\cdot(2,1,-1)=0 \Rightarrow 2-6k+2-2k=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

Sustituyendo, tenemos que el plano pedido es: $-x+4y+2z-7=0$

c) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta r es:
$$x+2y-5+k(-3x+2z+3)=0 \Rightarrow (1-3k)x+2y+2kz-5+3k=0$$

El vector normal de este plano $(1-3k,2,2k)$ y el vector normal del plano π $(2,1,-1)$, tienen que ser paralelos, luego sus componentes tienen que ser proporcionales.
$$\frac{1-3k}{2}=\frac{2}{1}=\frac{2k}{-1} \Rightarrow k=-1$$

Sustituyendo, tenemos que el plano pedido es: $4x+2y-2z-8=0$

Considera el punto $P(3,2,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a *P* y a la recta *r*.
b) Determina las coordenadas del punto *Q* simétrico de *P* respecto de la recta *r*.
MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

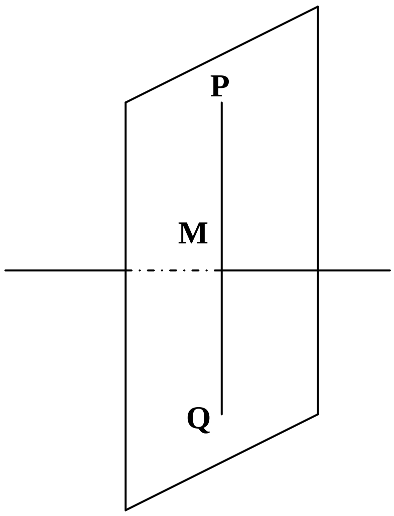
a) La ecuación del haz de planos que contiene a la recta *r* es: $x+y-z-3+k\,(x+2z+1)=0$. De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto $P(3,2,0)$, luego:

$$3+2-0-3+k\,(3+0+1)=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

por lo tanto, el plano pedido tiene de ecuación:

$$x+y-z-3-\frac{1}{2}(x+2z+1)=0 \ \Rightarrow\ x+2y-4z-7=0$$

b) El punto *Q* simétrico del punto *P* respecto de la recta *r*, está situado en un plano que pasando por el punto *P* es perpendicular a *r* y además la distancia que hay desde el punto *P* a la recta *r* es la misma que la que hay desde el punto *Q* hasta dicha recta.



Pasamos la ecuación de la recta a forma paramétrica $r \equiv \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1-2t \\ y=4+3t \\ z=t \end{cases}$

Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto *P* es perpendicular a *r*. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(-2,3,1)$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $-2x+3y+z+D=0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $P(3,2,0)$: $-2\cdot 3+3\cdot 2+0+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow -2x+3y+z=0$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $-2(-1-2t)+3(4+3t)+t=0 \Rightarrow t=-1$

luego las coordenadas del punto M son: $x=1-2\cdot(-1)=1;\ y=4+3\cdot(-1)=1;\ z=-1$

Como el punto M es el punto medio del segmento *P Q*, si llamamos (*a*, *b*, *c*) a las coordenadas del punto *Q*, se debe verificar que: $\frac{3+a}{2}=1; a=-1$; $\frac{2+b}{2}=1; b=0$; $\frac{0+c}{2}=-1; c=-2$

Luego el simétrico es: $Q=\left(-1,0,-2\right)$

Sean $\vec{u}=(x,2,0)$, $\vec{v}=(x,-2,1)$ y $\vec{w}=(2,-x,-4x)$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$.
a) Determina los valores de *x* para los que los vectores son linealmente independientes.
b) Halla los valores de *x* para los que los vectores son ortogonales dos a dos.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores son linealmente independientes si y solo si $\det(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}) \neq 0$

$\det(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & -2 & 1 \\ 2 & -x & -4x \end{vmatrix} = 17x^2+4 \neq 0$, sea cual sea el valor de *x*, luego los vectores son siempre linealmente independientes.

b) Si los vectores son ortogonales dos a dos sus productos escalares son cero.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow (x,2,0)\cdot(x,-2,1)=x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (x,2,0)\cdot(2,-x,-4x)=0 \Rightarrow 2x-2x=0 \Rightarrow$ x puede tomar cualquier valor.

$\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (x,-2,1)\cdot(2,-x,-4x)=0 \Rightarrow 2x+2x-4x=0 \Rightarrow$ x puede tomar cualquier valor.

Por tanto, los valores que puede tomar *x* son 2 y -2 para que los tres vectores sean ortogonales dos a dos.

Sea *r* la recta de ecuación $\begin{cases} x = a + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$ y *s* la recta de ecuación $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{3}$

a) Calcula el valor de *a* sabiendo que las rectas *r* y *s* se cortan.
b) Calcula el punto de corte.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si las rectas se cortan, cualquier punto $A = (a+t, 1-2t, 4-t)$ de la recta *r* tiene que verificar la ecuación de la recta *s*, luego:

$$\frac{a+t-1}{2} = \frac{1-2t+2}{1} = \frac{4-t}{3} \Rightarrow \begin{cases} a+t-1 = 6-4t \\ 3a+3t-3 = 8-2t \end{cases} \Rightarrow a = 2 \ ; \ t = 1$$

Luego para a = 2, las rectas se cortan.

b) El punto de corte será: $A = (a+t, 1-2t, 4-t) = (2+1, 1-2, 4-1) = (3, -1, 3)$

Halla un punto A de la recta r de ecuación $x=y=z$ y un punto B de la recta s de ecuación $x=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}$ de forma que la distancia entre A y B sea mínima.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x=s \\ y=-s \\ z=-1+2s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A=(t,t,t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B=(s,-s,-1+2s)$.

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB}=(s-t,-s-t,-1+2s-t)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\vec{AB}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow s-t-s-t-1+2s-t=0$$
$$\vec{AB}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow s-t+s+t-2+4s-2t=0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t=-\frac{1}{7}$ y $s=\frac{2}{7}$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A=\left(-\frac{1}{7},-\frac{1}{7},-\frac{1}{7}\right) \text{y } B=\left(\frac{2}{7},-\frac{2}{7},-1+\frac{4}{7}\right)=\left(\frac{2}{7},-\frac{2}{7},-\frac{3}{7}\right)$$

Sea r la recta de ecuación $\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{4}$ y s la recta dada por $\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -x+2y-3z=2 \end{cases}$

a) Determina la posición relativa de ambas rectas.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta r.

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{4}\Rightarrow\begin{cases} -x+5=2y+4 \\ 4x-20=2z \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-z=10 \end{cases}$$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -x+2y-3z=2 \\ x+2y=1 \\ 2x-z=10 \end{cases}$ y calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema. Como sale que el rango(A) = 3 y el rango (M) = 4, las dos rectas se cruzan.

b) Calculamos el vector director de la recta s

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=6\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k}-2\vec{k}+9\vec{j}-2\vec{i}=(4,8,4)$$

Calculamos el haz de planos que contiene a la recta r.

$$x+2y-1+k(2x-z-10)=0\Rightarrow(1+2k)x+2y-kz-1-10k=0$$

El vector normal del plano $(1+2k,2,-k)$ y el vector director de la recta $(4,8,4)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar es cero.

$$(1+2k,2,-k)\cdot(4,8,4)=0\Rightarrow 4+8k+16-4k=0\Rightarrow 4k=-20\Rightarrow k=-5$$

Luego el plano pedido es: $-9x+2y+5z+49=0$.

Considera la recta *r* de ecuaciones $\left\{\begin{aligned} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=0 \end{aligned}\right.$

a) Determina la ecuación del plano que contiene a la recta *r* y no corta al eje *OZ*.

b) Calcula la proyección ortogonal del punto $A(1,2,1)$ sobre la recta *r*.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el haz de planos que contiene a la recta *r*.

$$x+y+z-1+k(x-2y+3z)=0 \Rightarrow (1+k)x+(1-2k)y+(1+3k)z-1=0$$

El vector normal del plano $(1+k,1-2k,1+3k)$ y el vector director del eje OZ $(0,0,1)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar es cero.

$$(1+k,1-2k,1+3k)\cdot(0,0,1)=0 \Rightarrow 1+3k=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{3}$$

Luego el plano pedido es: $2x+5y-3=0$.

b) Pasamos la recta *r* a paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2-5t}{3} \\ y=\dfrac{1+2t}{3} \\ z=t \end{array}\right.$$

Cualquier punto *B* de la recta *r*, tendrá de componentes: $B=\left(\dfrac{2-5t}{3},\dfrac{1+2t}{3},t\right)$. El vector $\vec{AB}=\left(\dfrac{-1-5t}{3},\dfrac{-5+2t}{3},t-1\right)$ y el vector director de la recta $\vec{u}=(-5,2,3)$, tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar vale cero.

$$\vec{AB}\cdot\vec{u}=\left(\frac{-1-5t}{3},\frac{-5+2t}{3},t-1\right)\cdot(-5,2,3)=0 \Rightarrow \frac{5+25t}{3}+\frac{-10+2t}{3}+3t-3=0 \Rightarrow t=\frac{7}{19}$$

Luego el punto B será: $B=\left(\dfrac{2-5t}{3},\dfrac{1+2t}{3},t\right)=\left(\dfrac{1}{19},\dfrac{11}{19},\dfrac{7}{19}\right)$

Considera los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,4,1)$ y la recta r de ecuación $x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$

a) Determina un punto *C* de la recta *r* que equidiste de los puntos *A* y *B*.
b) Calcula el área del triángulo de vértices *ABC*.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *r* a paramétricas

$$x = y - 2 = \frac{z-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Cualquier punto *C*, tendrá de componentes $C = (t, 2+t, 3+2t)$. Como queremos que el punto *C* equidiste de *A* y de *B*, entonces, el módulo del vector $\vec{AC}$ tiene que ser igual al módulo del vector $\vec{BC}$.

Calculamos las coordenadas de dichos vectores: $\vec{AC} = (t-2, 1+t, 1+2t)$ y $\vec{BC} = (t, t-2, 2+2t)$ e igualamos sus módulos:

$$\sqrt{(t-2)^2 + (1+t)^2 + (1+2t)^2} = \sqrt{t^2 + (t-2)^2 + (2+2t)^2} \Rightarrow t = -1$$

Luego el punto C será: $C = (-1,1,1)$

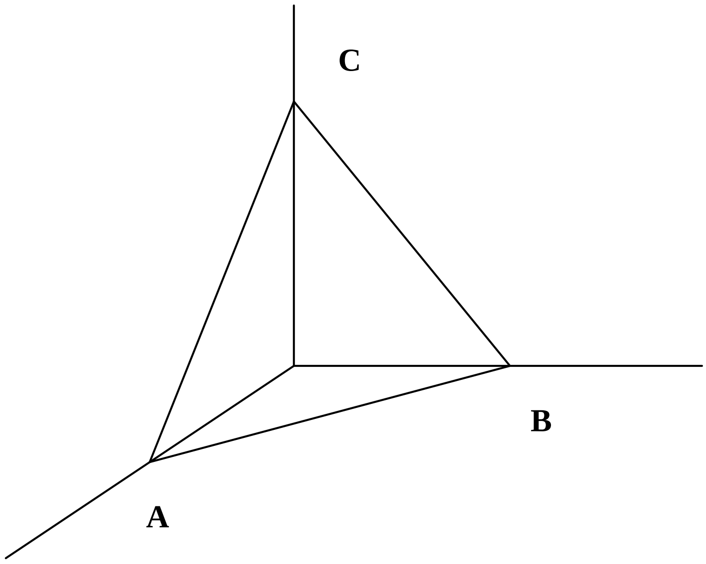
b) El área pedida es $S = \frac{1}{2} \, |\vec{AB} \wedge \vec{AC}|$

$\vec{AB} = (-2,3,-1)$; $\vec{AC} = (-3,0,-1)$.

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right| = \frac{1}{2} \text{ } módulo \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} módulo \ (-3\vec{i} + \vec{j} + 9\vec{k}) = \frac{1}{2}\sqrt{9+1+81} = 4'76 \ u^2$$

Halla la ecuación de un plano que sea paralelo al plano π de ecuación $x+y+z=1$ y forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $18\sqrt{3}$.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Un plano paralelo al plano $x+y+z=1$ es el $x+y+z=D$. Los puntos de corte de dicho plano con los ejes coordenados serán: $A=(D,0,0)$; $B=(0,D,0)$ y $C=(0,0,D)$

El área pedida es $S=\dfrac{1}{2}\,|\vec{AB}\wedge\vec{AC}|$

$\vec{AB}=(-D,D,0)$; $\vec{AC}=(-D,0,D)$.

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -D & D & 0\\ -D & 0 & D\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\textit{módulo}\ (D^2\,\vec{i}+D^2\,\vec{j}+D^2\,\vec{k})=\frac{1}{2}\sqrt{3D^4}=18\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$D^2\,\frac{\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}\Rightarrow D=\sqrt{36}=\pm 6$$

Por lo tanto, hay dos planos que cumplen la condición pedida que son: $x+y+z=6$ y $x+y+z=-6$

Sea la recta r de ecuación $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}$ y el plano π de ecuación $x-y+z+1=0$. Calcula el área del triángulo de vértices ABC, siendo A el punto de corte de la recta r y el plano π, B el punto $(2,1,2)$ de la recta r y C la proyección ortogonal del punto B sobre el plano π.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el punto de corte de la recta r con el plano π. Para ello pasamos a paramétricas la ecuación de la recta $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}\Rightarrow\begin{cases}x=1+t\\ y=-2+3t\\ z=3-t\end{cases}$ y la sustituimos en el plano.

$$1+t+2-3t+3-t+1=0\Rightarrow 7-3t=0\Rightarrow t=\frac{7}{3}$$

Luego las coordenadas del punto A son: $A=\left(1+\frac{7}{3},-2+7,3-\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{10}{3},5,\frac{2}{3}\right)$

Calculamos la proyección ortogonal del punto B sobre el plano π. Para ello calculamos la recta que pasa por B y es perpendicular a π.

$$\begin{cases}x=2+t\\ y=1-t\\ z=2+t\end{cases}$$

El punto C es el punto de corte del plano con dicha recta

$$2+t-1+t+2+t+1=0\Rightarrow 4+3t=0\Rightarrow t=-\frac{4}{3}$$

Luego las coordenadas del punto C son: $C=\left(2-\frac{4}{3},1+\frac{4}{3},2-\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right)$

El área pedida es $S=\frac{1}{2}\,|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\,|$

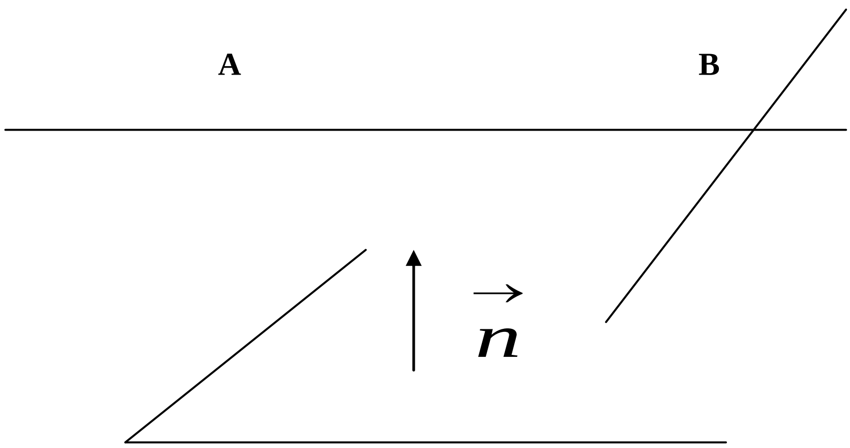
$\vec{AB}=\left(-\frac{4}{3},-4,\frac{4}{3}\right)$; $\vec{AC}=\left(-\frac{8}{3},-\frac{8}{3},0\right)$.

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\frac{4}{3} & -4 & \frac{4}{3}\\ -\frac{8}{3} & -\frac{8}{3} & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\textit{módulo}\left(\frac{32}{9}\vec{i},-\frac{32}{9}\vec{j},-\frac{64}{9}\vec{k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1024+1024+4096}{81}}=4'35\ u^2$$

Halla las ecuaciones paramétricas de una recta sabiendo que corta a la recta r de ecuación $x = y = z$, es paralela al plano π de ecuación $3x + 2y - z = 4$ y pasa por el punto $A(1,2,-1)$.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Cualquier punto B de la recta $r \equiv x = y = z$, será: $B = (t,t,t)$. Calculamos el vector director de la recta que buscamos que será $\vec{AB} = (t-1, t-2, t+1)$. Como la recta que buscamos tiene que ser paralela al plano $3x + 2y - z = 4$, el vector $\vec{AB}$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (3,2,-1)$ serán perpendiculares, luego su producto escalar valdrá cero.

$$\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (t-1, t-2, t+1) \cdot (3,2,-1) = 0 \Rightarrow 4t - 8 = 0 \Rightarrow t = 2$$

Luego la recta que nos piden pasa por $A(1,2,-1)$ y su vector director es $\vec{AB} = (1,0,3)$, luego su ecuación paramétrica será: $s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

Determina los puntos de la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x=0 \\ y-1=\dfrac{z-3}{2} \end{cases}$ que equidistan del plano π de ecuación $x+z=1$ y del plano π' de ecuación $y-z=3$.
MATEMÁTICAS II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta r a paramétricas $\begin{cases} x=0 \\ y-1=\dfrac{z-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=3+2t \end{cases}$ y por tanto podemos tomar como punto genérico de la recta $P=(0,1+t,3+2t)$.

Como piden los puntos que equidistan de los planos π y π', tenemos que $d(P,\pi)=d(P,\pi')$, luego:

$$d(P,\pi)=d(P,\pi')\Rightarrow \frac{|0+3+2t-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|1+t-3-2t-3|}{\sqrt{2}}\Rightarrow \frac{|2+2t|}{\sqrt{2}}=\frac{|-5-t|}{\sqrt{2}}\Rightarrow |2+2t|=|-5-t|$$

de donde salen las ecuaciones:

$$2+2t=-5-t\Rightarrow t=-\frac{7}{3}\Rightarrow P=\left(0,-\frac{4}{3},-\frac{5}{3}\right)$$
$$2+2t=5+t\Rightarrow t=3\Rightarrow P=(0,4,9)$$

Considera los puntos $A(1,0,-2)$ y $B(-2,3,1)$
a) Determina los puntos del segmento *AB* que lo dividen en tres partes iguales
b) Calcula el área del triángulo de vértices *A, B* y *C,* donde *C* es un punto de la recta de ecuación $-x = y-1 = z$. ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto *C*?
MATEMÁTICAS II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

Observamos la siguiente igualdad entre vectores $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM}$, y como $\overrightarrow{AB} = (-3,3,3)$ y $\overrightarrow{AM} = (x-1, y, z+2)$, obtenemos: $(-3,3,3) = (3x-3, 3y, 3z+6) \Rightarrow x = 0; y = 1; z = -1$, es decir el punto *M* es $M = (0,1,-1)$

También se observa que el punto *N* es el punto medio del segmento *MB*, es decir:

$$N = \frac{M+B}{2} = \left(\frac{0-2}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = (-1,2,0)$$

b) Antes de calcular el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C* escribimos la recta *r* en forma paramétrica $r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$

Cualquier punto *C* de la recta *r* tiene de coordenadas $C = (-t, 1+t, t)$. Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-3,3,3) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-t-1, 1+t, t+2)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -t-1 & 1+t & t+2 \end{vmatrix} = (3t+6)\vec{i} + (-3t-3)\vec{j} - (3t+3)\vec{k} - (3+3t)\vec{i} + (3t+6)\vec{j} - (-t-1)\vec{k} = (3,3,0)$$

$$S = \frac{1}{2} \,|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{9+9+0} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ u^2$$

Vemos que el área no depende del parámetro *t*, luego no depende de la elección del punto *C*.