

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  y  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de  $\lambda$  para los que la matriz  $A + \lambda I$  no tiene inversa ( $I$  es la matriz identidad).

b) Resuelve  $AX = -3X$ . Determina, si existe, alguna solución con  $x = 1$ .

**MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz  $A + \lambda I$ .

$$A + \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

Para que no tenga inversa el determinante debe valer cero, luego:

$$\begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 ; \lambda = -2 ; \lambda = 3$$

Luego, la matriz  $A + \lambda I$  no tiene inversa para los valores:  $\lambda = 2 ; \lambda = -2 ; \lambda = 3$ .

b) Resolvemos el sistema  $\left. \begin{matrix} -2x - 2y = -3x \\ -2x + y = -3y \\ -2z = -3z \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \Rightarrow x = 2y ; y = y ; z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Si  $x = 1$ , entonces la solución es:  $x = 1 ; y = \frac{1}{2} ; z = 0$

Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

a) Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos?. Razona la respuesta.

b) Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?.

**MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

## R E S O L U C I Ó N

a) Si llamamos  $x =$  Precio del lápiz,  $y =$  Precio del rotulador,  $z =$  Precio de la carpeta

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x + 7y &= 25 \\ 2x + 4y + z &= 20 \\ 3x + y + 2z &= 15 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 25 \\ 2 & 4 & 1 & 20 \\ 3 & 1 & 2 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 1 & -30 \\ 0 & -20 & 2 & -60 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 1 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x + 7y &= 25 \\ -10y + z &= -30 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 25 - 7t \\ y &= t \\ z &= -30 + 10t \end{aligned} \right\}$$

Vemos que es un sistema compatible indeterminado, por lo tanto, tiene infinitas soluciones. No podemos deducir el precio de cada artículo, pues algunas soluciones son absurdas, por ejemplo, si  $t = 1$ , entonces:  $x = 18$ ;  $y = 1$ ;  $z = -20$

b) Planteamos el nuevo sistema

$$\left. \begin{aligned} z &= 10x \\ 2x + 4y + z &= 20 \\ 3x + y + 2z &= 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x + 4y + 10x &= 20 \\ 3x + y + 20x &= 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ 23x + y &= 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 20x = 10 \Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{7}{2}; z = 5$$

Luego, el lápiz cuesta 0'5 €, el rotulador 3'5 € y la carpeta 5 €

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por  $AX = B$  siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 2m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de  $m$ .

b) Para  $m = 2$ , calcula, si es posible, una solución del sistema anterior para la que  $z = 17$ .

MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

## R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 3 + 6 - 2m + 4 - 9 = 0 \Rightarrow m = 2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

$$\text{Para } m = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

$$\text{Para } m = 2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$$

	R(A)	R(M)	
$m = 2$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m \neq 2$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para  $m = 2$ , el sistema que tenemos que resolver es:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Si  $z = 17$ , la solución del sistema sería:  $x = -23$ ;  $y = 8$ ;  $z = 17$