

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  y  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de  $m$  existe  $A^{-1}$  ?.

b) Siendo  $m = 2$ , calcula  $A^{-1}$  y resuelve el sistema  $A \cdot X = B$ .

c) Resuelve el sistema  $A \cdot X = B$  para  $m = 1$ .

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz  $A$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1 ; m = 3$$

Luego, la matriz tiene inversa para todos los valores de  $m \neq 1$  y  $3$

b) Calculamos la matriz inversa para  $m = 2$ .

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución del sistema es:  $x = 0$ ;  $y = 1$ ;  $z = -1$

c) Resolvemos el sistema  $\begin{cases} x - z = 1 \\ y + 3z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ y = -1 - 3z \\ z = z \end{cases}$

Una empresa cinematográfica dispone de tres salas,  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 €, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 € y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala  $A$  hubieran asistido a la sala  $B$  y los de la sala  $B$  a la sala  $A$ , se hubiese obtenido una recaudación de 20 € más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.

**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

## R E S O L U C I Ó N

Llamamos  $x$  = espectadores de la sala  $A$ .  
 $y$  = espectadores de la sala  $B$ .  
 $z$  = espectadores de la sala  $C$ .

Leyendo el enunciado del problema podemos plantear un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y + 5z = 720 \\ x + y + z = 200 \\ 4x + 3y + 5z = 740 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 100 ; y = 80 ; z = 20$$

Determina razonadamente los valores de  $m$  para los que el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = mx \\ x + 2y + z = my \\ x + 2y + 4z = mz \end{array} \right\}$$

tiene más de una solución.

**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

Lo primero que hacemos es ordenar el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = mx \\ x + 2y + z = my \\ x + 2y + 4z = mz \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (2-m)x + y + z = 0 \\ x + (2-m)y + z = 0 \\ x + 2y + (4-m)z = 0 \end{array} \right\}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{vmatrix} = -m^3 + 8m^2 - 16m + 9 = 0 \Rightarrow m = 1 ; m = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Luego, el sistema homogéneo tiene más de una solución si  $m = 1$  ó  $m = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} x + my - z = -2 + 2my \\ \text{Considera el sistema de ecuaciones: } mx - y + 4z = 5 + 2z \\ 6x - 10y - z = -1 \end{array} \right\}$$

- a) Discute las soluciones del sistema según los valores de  $m$ .  
b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es ordenar el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + my - z = -2 + 2my \\ mx - y + 4z = 5 + 2z \\ 6x - 10y - z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - my - z = -2 \\ mx - y + 2z = 5 \\ 6x - 10y - z = -1 \end{array} \right\}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = -m^2 + 2m - 15 = 0 \Rightarrow m = 3 ; m = -5$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$m = -5$	2	3	S. Incompatible
$m = 3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$b \neq 3 \text{ y } -5$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Resolvemos el sistema para  $m = 3$

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y - z = -2 \\ 3x - y + 2z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 3y = -2 + z \\ 3x - y = 5 - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{17 - 7z}{8} \\ y = \frac{11 - 5z}{8} \\ z = z \end{array} \right.$$

Considera las matrices:  $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$  y  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Siendo  $I$  la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de  $\lambda$  para los que la matriz  $A + \lambda I$  no tiene inversa.

b) Resuelve el sistema  $A \cdot X = 3X$  e interpreta geoméricamente el conjunto de todas sus soluciones.  
**MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz  $A + \lambda I$ .

$$A + \lambda I = \begin{pmatrix} -2 + \lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1 + \lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2 + \lambda \end{pmatrix}$$

Su determinante vale:

$$|A + \lambda I| = \begin{vmatrix} -2 + \lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1 + \lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2 + \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3$$

Luego, la matriz no tiene inversa para  $\lambda = \pm 3$

b) Resolvemos el sistema 
$$\left. \begin{array}{l} -5x - 2y + z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{array} \right\}$$

Es un sistema homogéneo cuya solución es:  $x = z$ ;  $y = -2z$ ;  $z = z$  y solución trivial