PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2010

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Sean las matrices $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & m & 3\\ 4 & 1 & -m\end{pmatrix}}$**,** $\boldsymbol{B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}}$ **y** $\boldsymbol{C=\begin{pmatrix}5 & -3 & 4\\ -3 & -2 & 2\end{pmatrix}}$

a) Indica los valores de *m* para los que *A* es invertible.

b) Resuelve la ecuación $\boldsymbol{XA-B^t=C}$ **para** $\boldsymbol{m=0}$**. (**$\boldsymbol{B^t}$ **es la matriz traspuesta de B)**

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz *A* tiene inversa si su determinante es distinto de cero, luego:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & m & 3\\ 4 & 1 & -m\end{vmatrix}=-m^2+4m-3=0\Rightarrow m=1\ ;\ m=3$$

Por lo tanto, la matriz *A* tendrá inversa para todos los valores de $m\neq 1\ y\ m\neq 3$.

b) Calculamos la matriz inversa de *A*.

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-3 & 12 & 0\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}^t}{-3}=\frac{\begin{pmatrix}-3 & -1 & 0\\ 12 & 4 & -3\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}}{-3}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3} & 0\\ -4 & -\frac{4}{3} & 1\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial y calculamos la matriz *X*.

$$XA-B^t=C\Rightarrow X=(C+B^t)\cdot A^{-1}=\left[\begin{pmatrix}5 & -3 & 4\\ -3 & -2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3} & 0\\ -4 & -\frac{4}{3} & 1\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Sea la matriz $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}}$

a) Comprueba que se verifica $\boldsymbol{2A-A^2=I}$

b) Calcula $\boldsymbol{A^{-1}}$**. (Sugerencia: Puedes usar la igualdad del apartado (a)).**

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$2A-A^2=2\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) De la igualdad del apartado a se deduce que:

$$2A-A^2=I\Rightarrow A\cdot\left(2I-A\right)=I\Rightarrow A^{-1}=2I-A$$

Luego: $A^{-1}=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Considera las siguientes matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1}**.**

b) Resuelve la ecuación matricial $A\cdot X\cdot A^{t}-B=2I$**, donde** I **es la matriz identidad de orden 2 y** A^{t} **es la matriz traspuesta de** A**.**

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$(A)^{-1}=\frac{(A^{d})^{t}}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}^{t}}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-a+2c & -b+2d\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a-2c-2b+4d & -b+2d\\ -c+2d & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a-2c-2b+4d & -b+2d\\ -c+2d & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a-2c-2b+4d=-1\\ -b+2d=0\\ -c+2d=2\\ d=1\end{array}\right\}\Rightarrow a=-1\ ;\ b=2\ ;\ c=0\ ;\ d=1$$

Luego: $X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Obtén un vector no nulo $v=(a,b,c)$, de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Para que el rango (A) = rango (B) = 2, sus determinantes deben valer cero, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}=b+a-c-b=a-c=0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix}=-2c+3a-2b=0$$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $\left.\begin{array}{l} a-c=0 \\ 3a-2b-2c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=c \ ; \ b=\dfrac{c}{2} \ ; \ c=c$

Luego, el vector que nos piden es $v=\left(c,\dfrac{c}{2},c\right)$, siendo c cualquier número distinto de cero.

De la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que $\det(A)=4$. Se pide:

a) Halla $\det(-3A^t)$ y $\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$. Indica las propiedades que utilizas.

b) Calcula $\det(A^{-1}\cdot A^t)$

c) Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3=I$, siendo I la matriz identidad, halla $\det(B)$.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\det(-3A^t)=(-3)^2\det(A^t)=9\cdot\det(A)=9\cdot 4=36$$

$$\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}=2\cdot(-3)\det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}=-6\cdot(-1)\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=6\cdot 4=24$$

Si en un determinante cambiamos dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

Si en un determinante hay un número que multiplica a una fila o columna, dicho numero sale fuera multiplicando al determinante.

b) $\det(A^{-1}\cdot A^t)=\det(A^{-1})\cdot\det(A^t)=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot\det(A)=1$

c) $\det(B^3)=\det(B\cdot B\cdot B)=\det(B)\cdot\det(B)\cdot\det(B)=\left[\det(B)\right]^3=1\Rightarrow\det(B)=\sqrt[3]{1}=1$

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz X **que cumpla la ecuación** $AXB=C$

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La ecuación que tenemos que resolver es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -a+d & -b+e & -c+f \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} a & -b+c & -b+2c \\ -a+d & b-e-c+f & b-e-2c+2f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} a=3 \\ -b+c=1 \\ -b+2c=2 \\ -a+d=0 \\ b-e-c+f=1 \\ b-e-2c+2f=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow a=3\ ;\ d=3\ ;c=1\ ;\ b=0\ ;\ f=-2\ ;\ e=-4$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$