

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sea la función $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$. Calcule:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Las coordenadas de sus extremos relativos.

c) El punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica es 4.

SOCIALES II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a y b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 4x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 4$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
Función $f(x)$	D	C	D

↓ ↓
mínimo $(0,0)$ Máximo $\left(4, \frac{32}{3}\right)$

La función es creciente en $(0, 4)$ y decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$. Tiene un máximo en $\left(4, \frac{32}{3}\right)$ y un mínimo en $(0,0)$.

c) Igualamos la derivada a 4.

$$f'(x) = 4x - x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

Luego, el punto es $\left(2, \frac{16}{3}\right)$.

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{e^{3x}}{1+x^2}$

b) $g(x) = \ln\{x(1+3x^2)\}$

c) $h(x) = 2^{5x} + \frac{1}{x^2}$

SOCIALES II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $f'(x) = \frac{3 \cdot e^{3x}(1+x^2) - 2x \cdot e^{3x}}{(1+x^2)^2} = \frac{e^{3x}(3+3x^2-2x)}{(1+x^2)^2}$

b) $g(x) = \ln\{x(1+3x^2)\} = \ln(x+3x^3)$; $g'(x) = \frac{1+9x^2}{x+3x^3}$

c) $h'(x) = 5 \cdot 2^{5x} \cdot \ln 2 - \frac{2x}{x^4} = 5 \cdot 2^{5x} \cdot \ln 2 - \frac{2}{x^3}$

En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión: $B(x) = 0.5x^2 - 4x + 6$, siendo x la inversión en publicidad, en miles de euros, con x en el intervalo $[0,10]$.

- a) ¿Para qué valores de la inversión la empresa tiene pérdidas?
b) ¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible?
c) ¿Cuál es el beneficio si no invierte nada en publicidad?. ¿Hay algún otro valor de la inversión para el cual se obtiene el mismo beneficio?.

SOCIALES II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

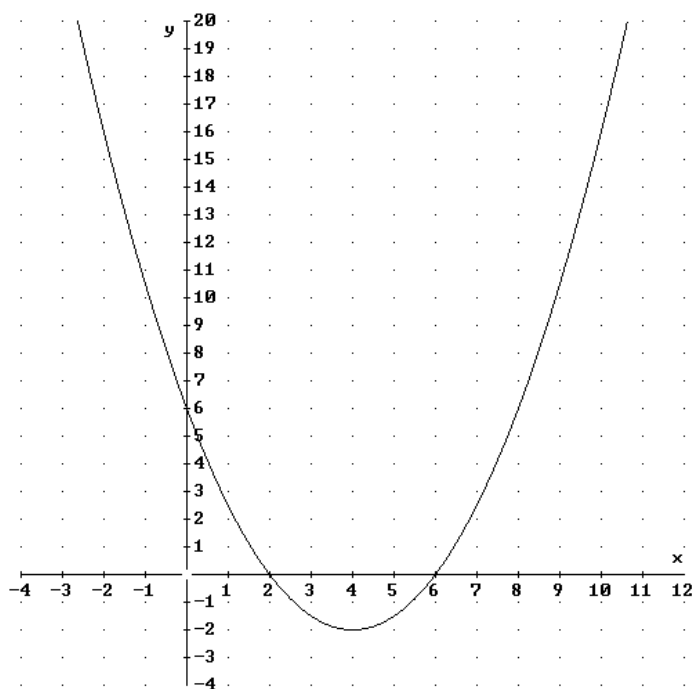
a) Calculamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$0.5x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 0.5 \cdot 6}}{2 \cdot 0.5} = \frac{4 \pm 2}{1} \Rightarrow x = 6 ; x = 2$$

La empresa tiene pérdidas para todos los valores del intervalo $(2,6)$.

b) El mayor beneficio se obtiene para $x = 10$.

c) Si no se invierte nada en publicidad ($x = 0$), el beneficio es 6.000 €. Para $x = 8$ también se obtiene el mismo beneficio.



$$\text{Sea la función } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.

b) Representéla gráficamente.

SOCIALES II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\frac{2}{x}$ es continua y derivable para todos los valores excepto en $x=0$; la función $x^2 - 4x + 5$ es continua y derivable para todos los valores. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x=1$.

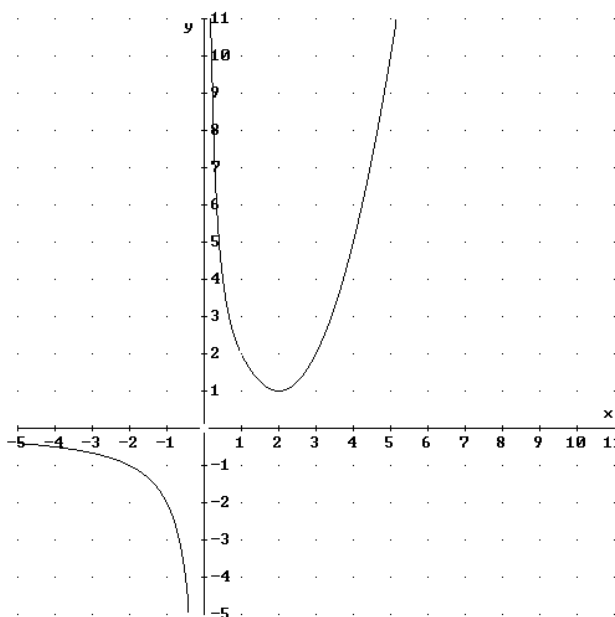
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 4x + 5 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \Rightarrow \text{Continua en } x = 1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^2} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow \text{Derivable en } x = 1$$

Luego la función $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

b)



Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x^3 - x^2 + 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases} ; \quad h(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x^2 - x + 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

- a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f en $x = 0$.
 b) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función h en $x = 0$.
 c) Si las dos funciones anteriores representan el perfil de un arco puntiagudo de una catedral y el de un arco redondeado (sin picos) de un túnel, indique, razonadamente, la que corresponde a la catedral y la que corresponde al túnel.

SOCIALES II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

$$a) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - x^2 + 2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^3 - x^2 + 2) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \Rightarrow \text{Continua en } x = 0$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -3x^2 - 2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \text{Derivable en } x = 0$$

Luego la función $f(x)$ es continua y derivable en $x = 0$

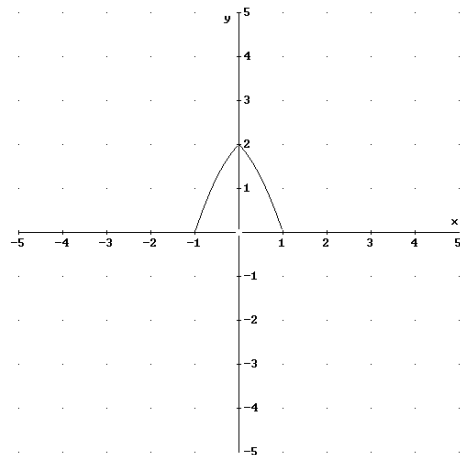
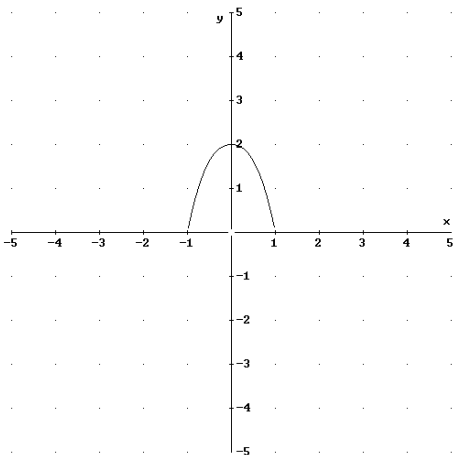
$$b) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + x + 2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 - x + 2) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \Rightarrow \text{Continua en } x = 0$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -2x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x = 0$$

Luego la función $h(x)$ es continua en $x = 0$ y no derivable en $x = 0$

- c) $f(x)$ corresponde al arco redondeado (túnel) y $h(x)$ al arco puntiagudo de una catedral por no ser derivable.



El gerente de una empresa sabe que los beneficios de la misma, $f(x)$, dependen de la inversión, x , según la función: $f(x) = -x^2 + 11x - 10$.

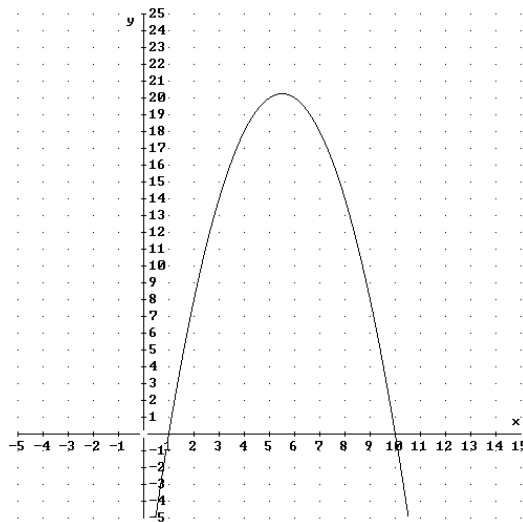
(x es la cantidad invertida, en millones de euros)

- Determine los valores de la inversión para los que la función beneficio es no negativa.
- Halle el valor de la inversión para el cual el beneficio es máximo. ¿A cuánto asciende éste?
- ¿Entre qué valores ha de estar comprendida la inversión para que el beneficio sea creciente, sabiendo que éste es no negativo?

SOCIALES II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Si hacemos la gráfica de la función, tenemos:



a) Calculamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$-x^2 + 11x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 40}}{-2} = \frac{-11 \pm 9}{-2} \Rightarrow x = 1 ; x = 10$$

En el intervalo (1,10) la función beneficio es no negativa.

b) Calculamos el vértice de la parábola.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{11}{-2} = \frac{11}{2}$$

Luego, el valor de la inversión es $x = \frac{11}{2}$ (5'5 millones de euros).

$$\text{El beneficio es: } f(x) = -\left(\frac{11}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{11}{2}\right) - 10 = \frac{81}{4}$$

c) En el intervalo (1,5'5) el beneficio es creciente y no negativo.

$$\text{Sea la función definida por } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 - 4x^2 & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ 1 - \frac{4}{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

SOCIALES II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\frac{x^2}{2}$ es continua y derivable para $x \leq 0$; la función $x^3 - 4x^2$ es continua y derivable para $0 < x \leq 4$; la función $1 - \frac{4}{x}$ es continua y derivable para $x > 4$. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x = 0$ y $x = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - 4x^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Continua en } x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} x^3 - 4x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} 1 - \frac{4}{x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Continua en } x = 4$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 8x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \frac{4}{x^2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \text{Derivable en } x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(4^-) = 16 \\ f'(4^+) = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(4^-) \neq f'(4^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x = 4$$

Luego la función $f(x)$ es continua en \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} - \{4\}$

b) La ecuación de la tangente es:

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y + 8 = -4 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -4x$$

Un depósito lleno de agua se vacía por un sumidero que tiene en la parte baja. El volumen de agua, en m^3 , que hay en cada momento en el depósito, desde que empieza a vaciarse, viene dado por la función $V(t) = 8 - t + \frac{t^2}{32}$, donde t es el tiempo en minutos.

- ¿Cuál es la capacidad del depósito?
 - ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse?
 - Represente gráficamente la función $V(t)$.
 - Calcule la derivada de esa función en $t = 8$ e interprete su significado.
- SOCIALES II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

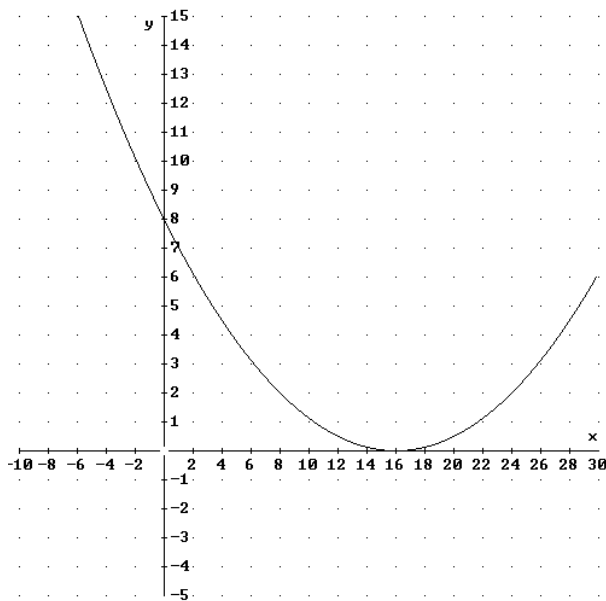
R E S O L U C I Ó N

- La capacidad del depósito es $8 m^3$.
- Calculamos el punto de corte de la función con el eje X.

$$\frac{t^2}{32} - t + 8 = 0 \Rightarrow t^2 - 32t + 256 = 0 \Rightarrow x = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 1024}}{2} \Rightarrow x = 16$$

Tarda 16 minutos en vaciarse.

c)



- $V' = -1 + \frac{t}{16} \Rightarrow V'(8) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Sea la función $f(x) = 2x^2 + ax + b$

a) Determine los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 3)$ y alcanza un extremo local en el punto de abscisa $x = -2$.

b) Tomando $a = 8$ y $b = -10$ deduzca la curvatura de su gráfica, el valor mínimo que alcanza la función y los valores donde la función se anula.

SOCIALES II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\text{Pasa por } (1, 3) \Rightarrow 2 + a + b = 3$$

$$\text{Extremo local en } x = -2 \Rightarrow f'(-2) = 0 \Rightarrow -8 + a = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, obtenemos que: $a = 8$; $b = -7$.

b) La función es: $f(x) = 2x^2 + 8x - 10$. Calculamos la primera y segunda derivada.

$$f'(x) = 4x + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$f''(x) = 4$$

Como $f''(x) = 4 > 0 \Rightarrow$ la función es convexa. Tiene un mínimo en $(-2, -18)$.

Calculamos los puntos donde se anula la función:

$$2x^2 + 8x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{4} = \frac{-8 \pm 12}{4} \Rightarrow x = 1 ; x = -5$$

a) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \left(\frac{2-5x}{3}\right)^2 + \frac{1-2x}{x^2} \quad ; \quad g(x) = (3x+2)^2 \cdot \ln(1+x^2)$$

b) Halle las asíntotas y los puntos de corte con los ejes de $h(x) = \frac{1+2x}{x-2}$

SOCIALES II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$a) f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{2-5x}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{-2x^2 - 2x(1-2x)}{x^4} = \frac{-20+50x}{9} + \frac{2x-2}{x^3}$$

$$g'(x) = 2 \cdot (3x+2) \cdot 3 \cdot \ln(1+x^2) + \frac{2x}{1+x^2} (3x+2)^2 = 2 \cdot (3x+2) \left[3 \cdot \ln(1+x^2) + \frac{x(3x+2)}{1+x^2} \right]$$

b)

Asíntota vertical: $x = 2$

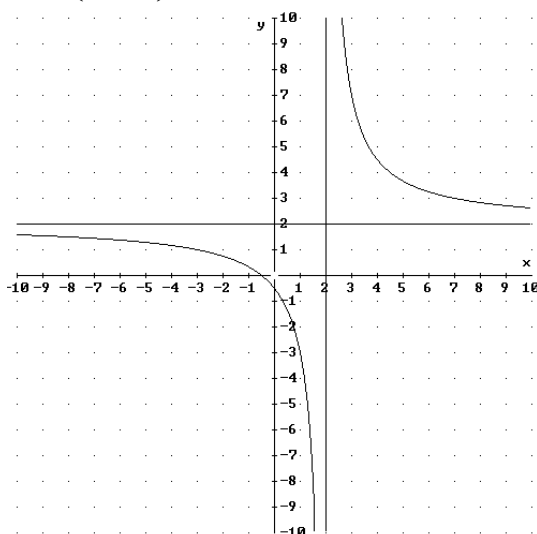
$$\text{Asíntota horizontal: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2x}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow y = 2$$

Asíntota oblicua: No tiene

Puntos de corte con los ejes

$$\text{Eje X: } y = 0 \Rightarrow 1+2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\text{Eje Y: } x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$



Un consultorio médico abre a las 5 de la tarde y cierra cuando no hay pacientes.
 La expresión que representa el número medio de pacientes en función del tiempo en horas, t , que lleva abierto el consultorio es $N(t) = 4t - t^2$.

- a) ¿A qué hora el número medio de pacientes es máximo? ¿Cuál es ese máximo?
 b) Sabiendo que el consultorio cierra cuando no hay pacientes, ¿a qué hora cerrará?
 c) Represente gráficamente $N(t) = 4t - t^2$, con $N(t) \geq 0$.

SOCIALES II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero:

$$N'(t) = 4 - 2t = 0 \Rightarrow t = 2$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
Signo $N'(t)$	+	-
Función $N(t)$	C	D

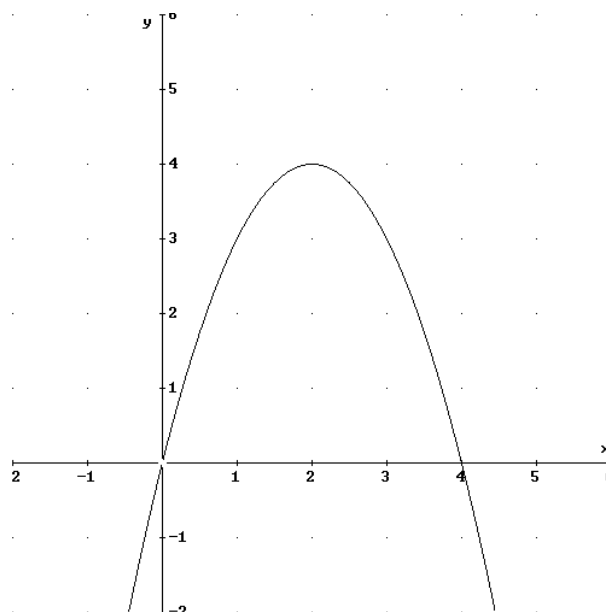
↓
Máximo (2, 4)

b) Igualamos la función a cero.

$$N(t) = 4t - t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 ; t = 4$$

Luego, cerrará a las 9 de la noche.

c)



Sea la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 - 6x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Calcule el valor de “a” para que f sea continua en $x = 1$.

b) Para $a = 1$, represente su gráfica y, a la vista de ella, indique su monotonía y las coordenadas de sus extremos locales.

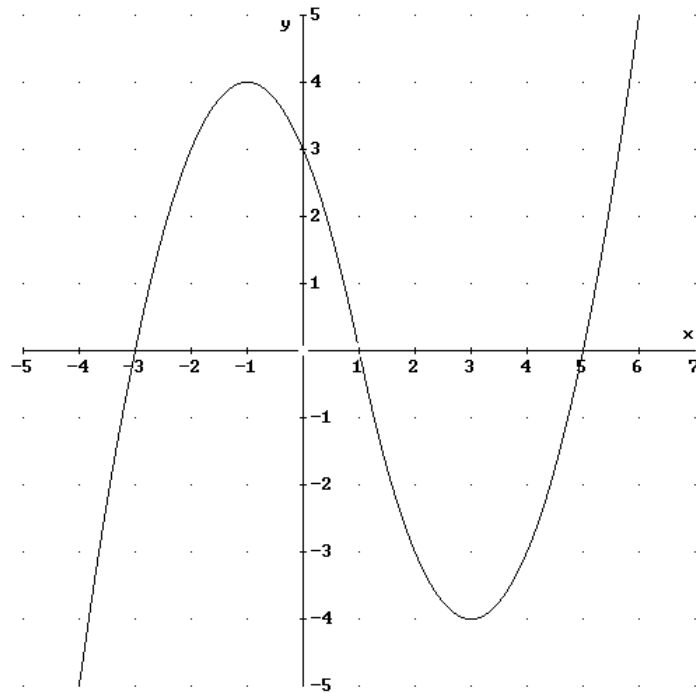
SOCIALES II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Para que sea continua los límites laterales tienen que coincidir, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 - 2ax + 3 = -2a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 - 6x + 5 = a - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -2a + 2 = a - 1 \Rightarrow a = 1$$

b)



La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ y decreciente en $(-1, 3)$. Tiene un máximo en $(-1, 4)$ y un mínimo en $(3, -4)$.